



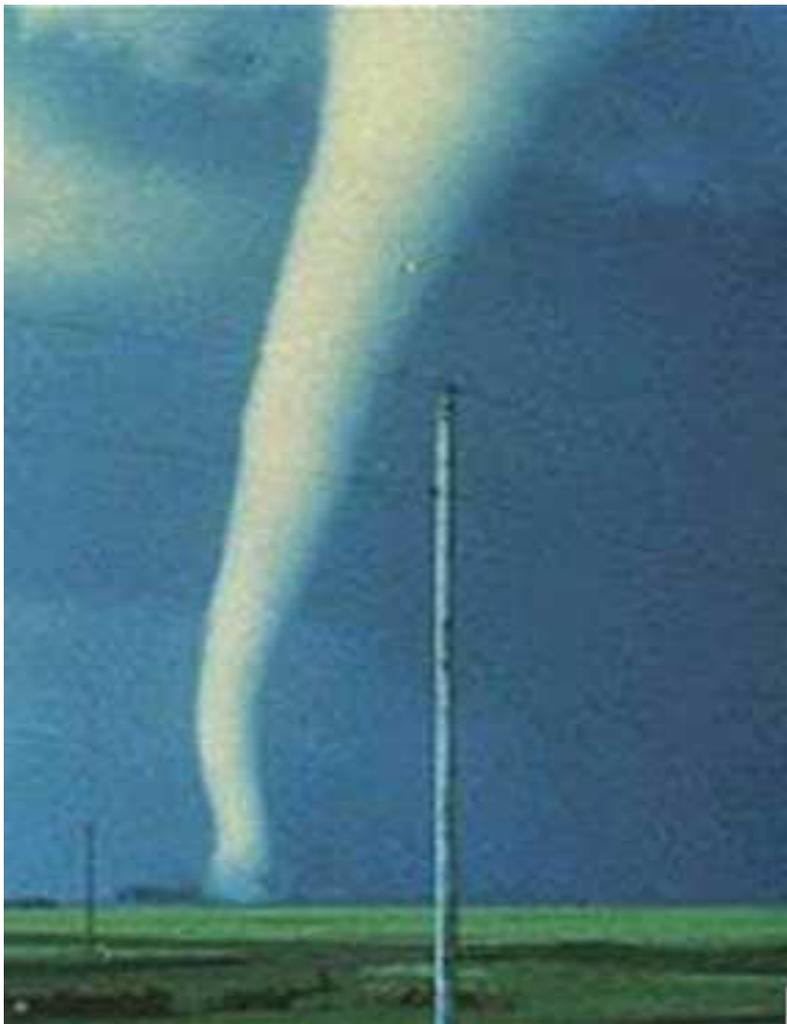
# **ТРИГГЕРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ БЫСТРОЙ ГЕНЕРАЦИИ И ПОДПИТКИ ТОРНАДО-ЦИКЛОНА**

Маслов С.А., Натяганов В.Л.

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

**Триггерные эффекты в геосистемах, 2022**

**Торнадо, или смерч** – атмосферный вихрь, опускающийся из закрученного грозового облака (**торнадо-циклона**) в виде быстро вращающейся воронки. Часто торнадо сопровождаются электрическими явлениями как вне, так и внутри воронки.



## Энергия электрического $W_e$ и магнитного $W_m$ полей Земли в ясную погоду и под торнадо-циклоном. Уравнения электрогидродинамики

### В ясную погоду

$$E_0 \sim 10^2 \text{ В/м}, B_0 \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$$

$$W_e = \varepsilon_0 E_0^2 / 2 \sim 4.4 \cdot 10^{-8} \text{ Дж/м}^3$$

$$W_e \ll W_m = B_0^2 / 2\mu_0 \sim 10^{-3} \text{ Дж/м}^3$$

### Под грозовым облаком

$$E \geq 10^5 \text{ В/м}, B \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$$

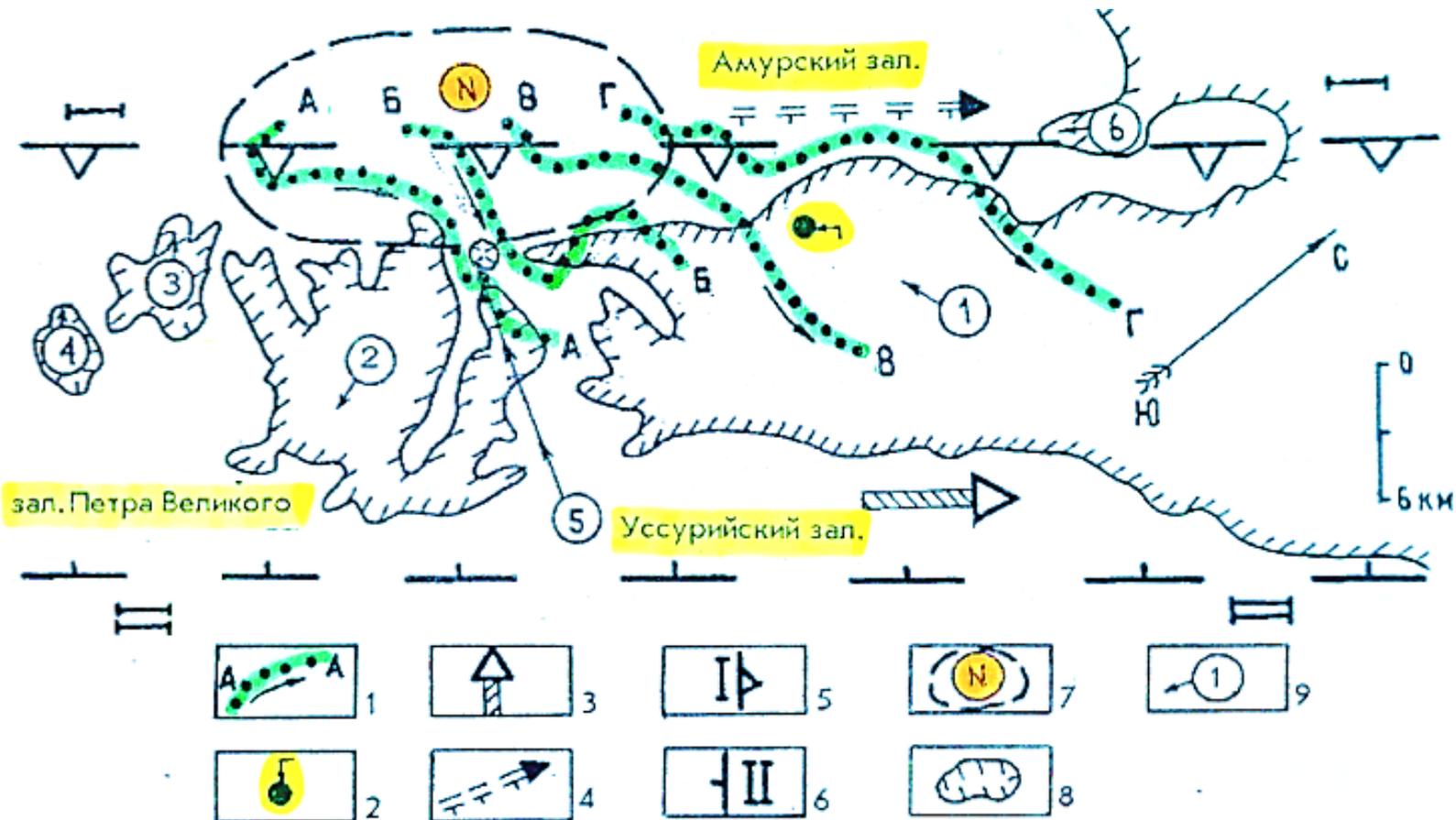
$$W_e = \varepsilon_0 E^2 / 2 \geq 4.4 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^3 > W_m$$

$$W_{em} = \varepsilon_0 E^2 / 2 + B^2 / 2\mu_0$$

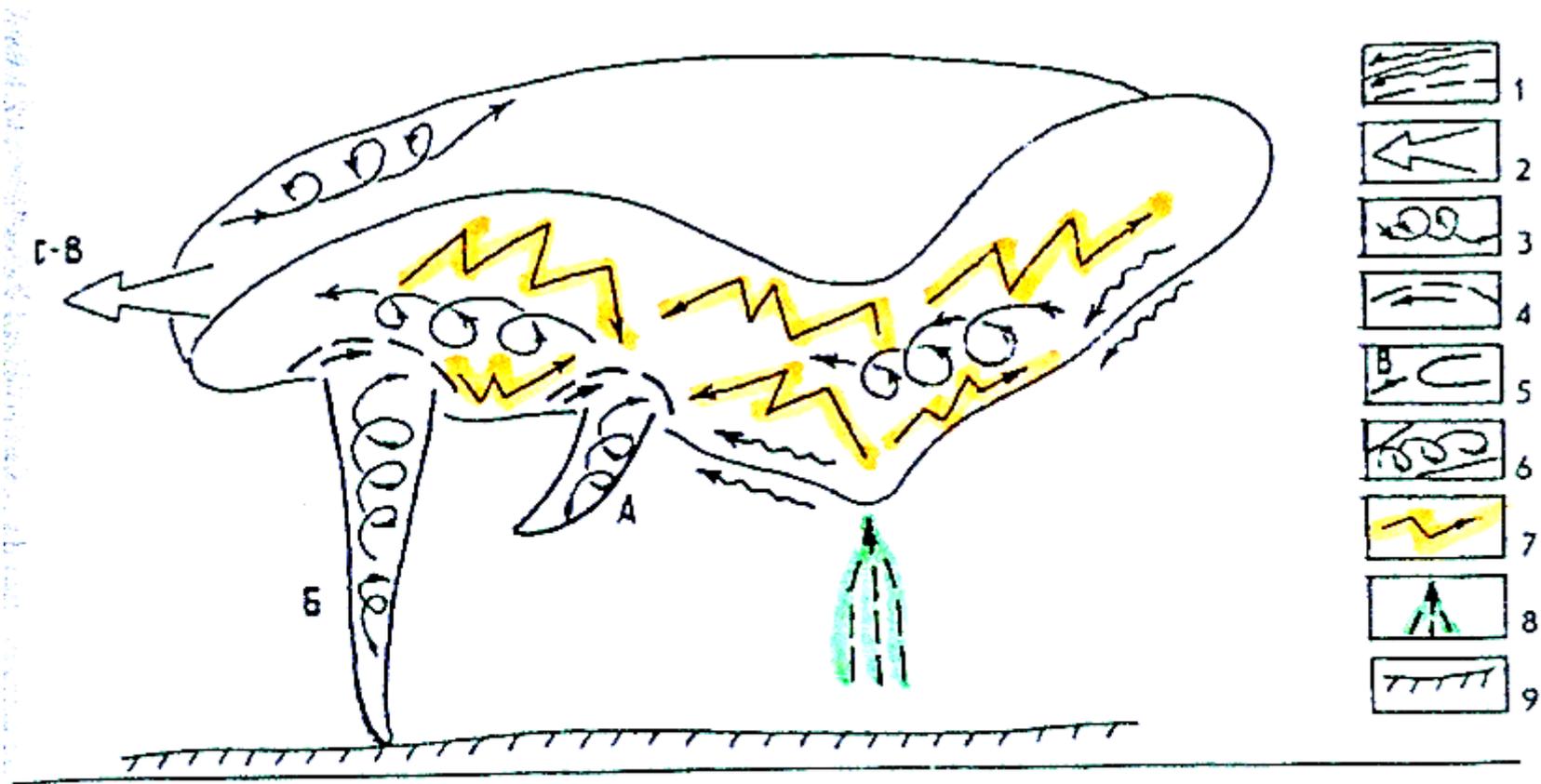
В ходе исследования процессов под грозовыми облаками (в частности, под торнадо-циклоном в процессе опускания воронки торнадо) целесообразно использовать уравнения **электрогидродинамики**:

$$\begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \mu \Delta \vec{u} - \rho_e \nabla \Phi, & d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \\ \vec{E} = -\nabla \Phi, & \varepsilon_0 \operatorname{div} (\varepsilon \nabla \Phi) = -\rho_e, & \vec{j} = -\sigma \nabla \Phi + \rho_e \vec{u}, & \partial \rho_e / \partial t + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \end{cases}$$

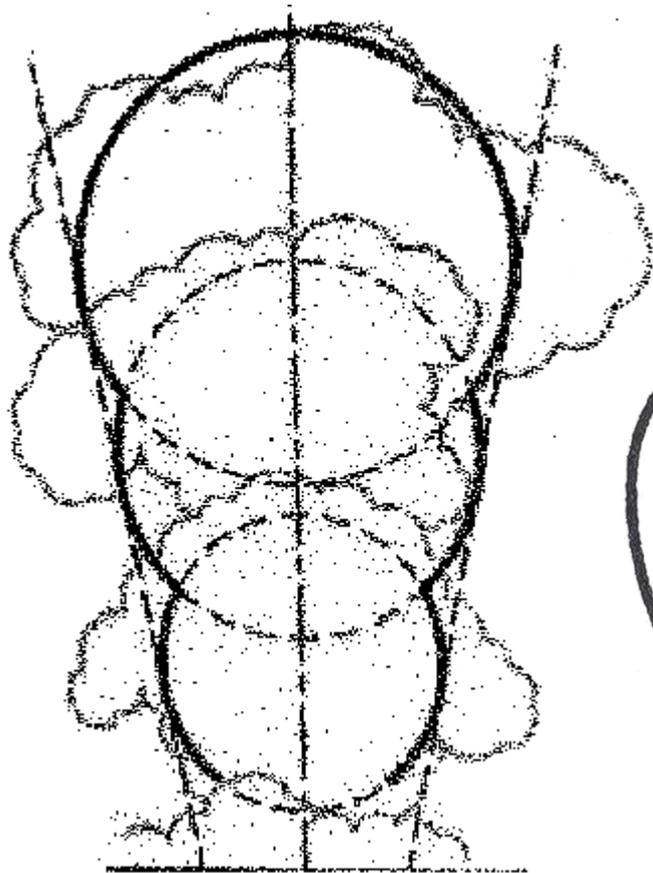
$\rho_e$  – зарядовая плотность среды,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\sigma$  – электропроводность среды,  $\Phi$  – потенциал электрического поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  – плотность электрического тока.



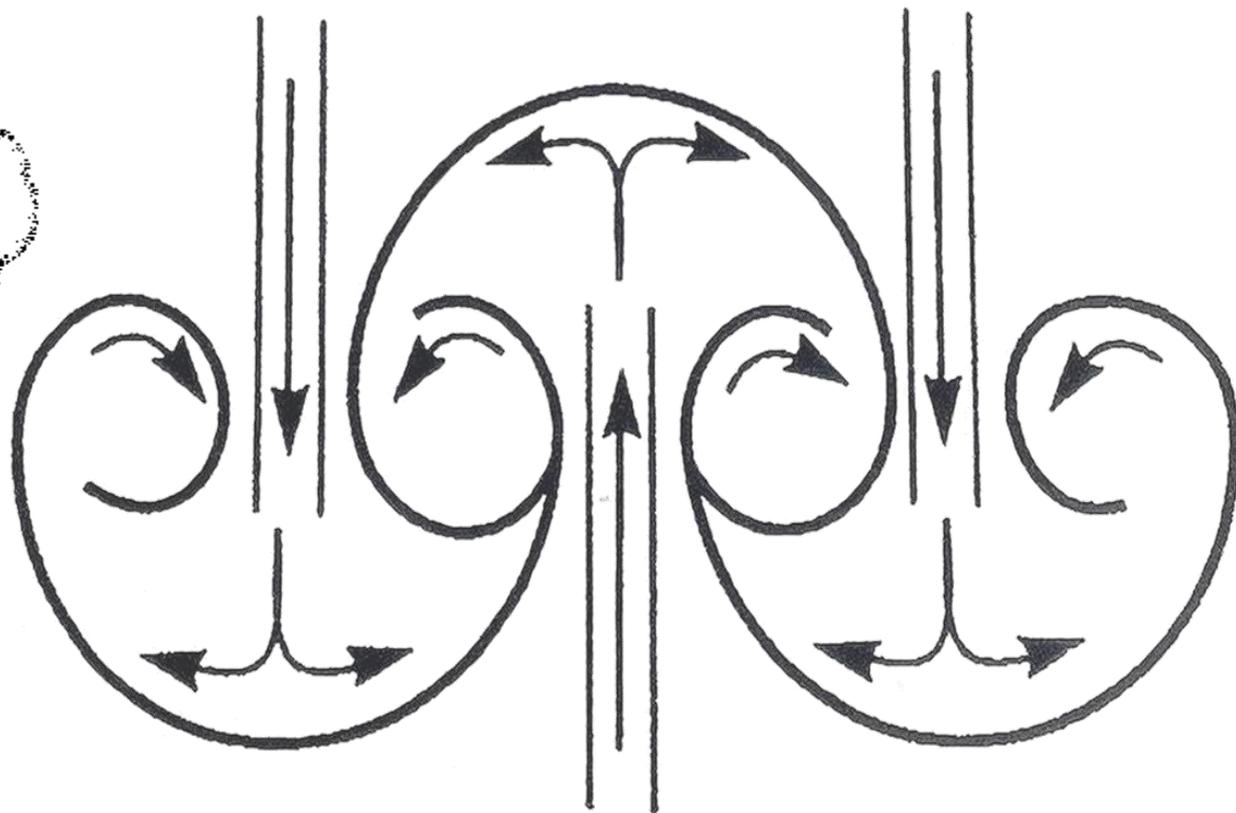
План-схема смерчей над Владивостоком: 1 — траектории движения шкваловых облаков и 4 смерчей (А-, Б-, В-, Г-смерчи); 2 — место наблюдения и фотографирования смерчей; 3 — направление фронта шквалов (на северо-восток); 4 — фронт выпадения смерчей (А, Б, В, Г); 5 — глубинный сейсродинамический энергорудогенерирующий разлом (I-I) Амурского залива с падением под п-ов Муравьева-Амурского; 6 — глубинный разлом (II-II) Уссурийского залива с падением под полуострова; 7 — активная энергодинамическая зона и пульсирующая тектоносферная воронка (N); 8 — береговая линия; 9 — контуры суши: 1 — п-ов Муравьева-Амурского, на котором расположен г. Владивосток, 2 — о-в Русский, 3 — о-в Полова, 4 — о-в Рейнеке, 5 — о-в Св. Елены, 6 — п-ов Де-Фриза



Структура первого шквального облака (вид сбоку от наблюдателя) с А-смерчем и Б-смерчем: 1 — внешнее вращающееся кольцо смерченосного облака; 2 — фронт шквального смерчеградоносного облака (на с.-в.); 3 — локальные завихрения во внешнем кольце облака; 4 — внутреннее вращение в облаке; 5 — поронки выпадающих смерчей и его обозначение (А, Б); 6 — вращение смерча в поронке; 7 — зигзаги молний; 8 — восходящий поток подпитки шквального облака; 9 — поверхность земли и воды



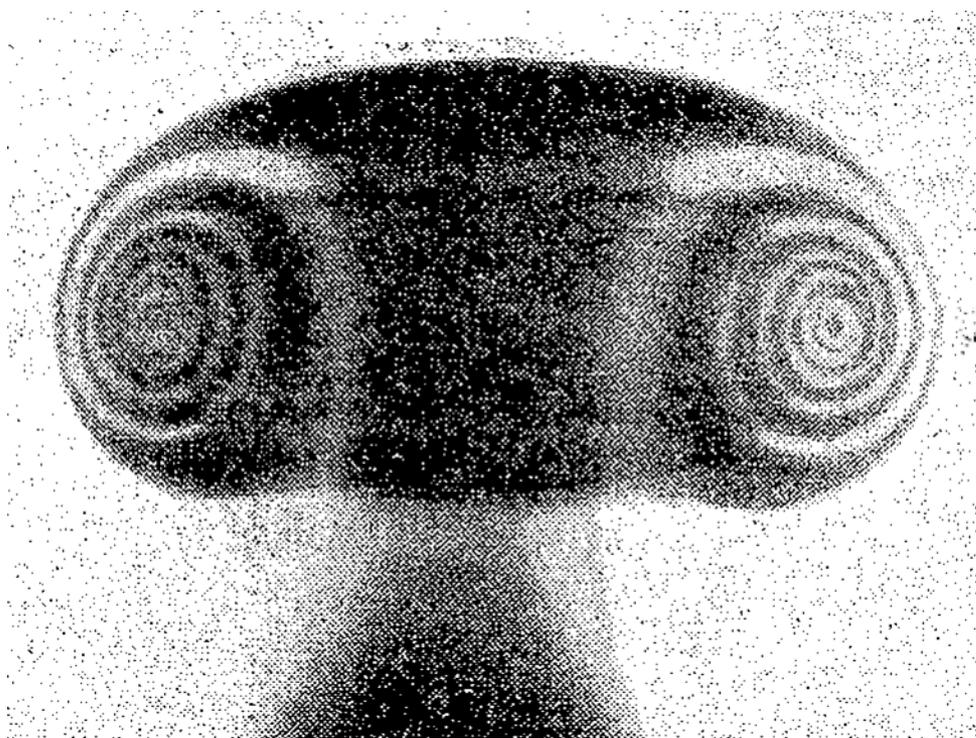
а



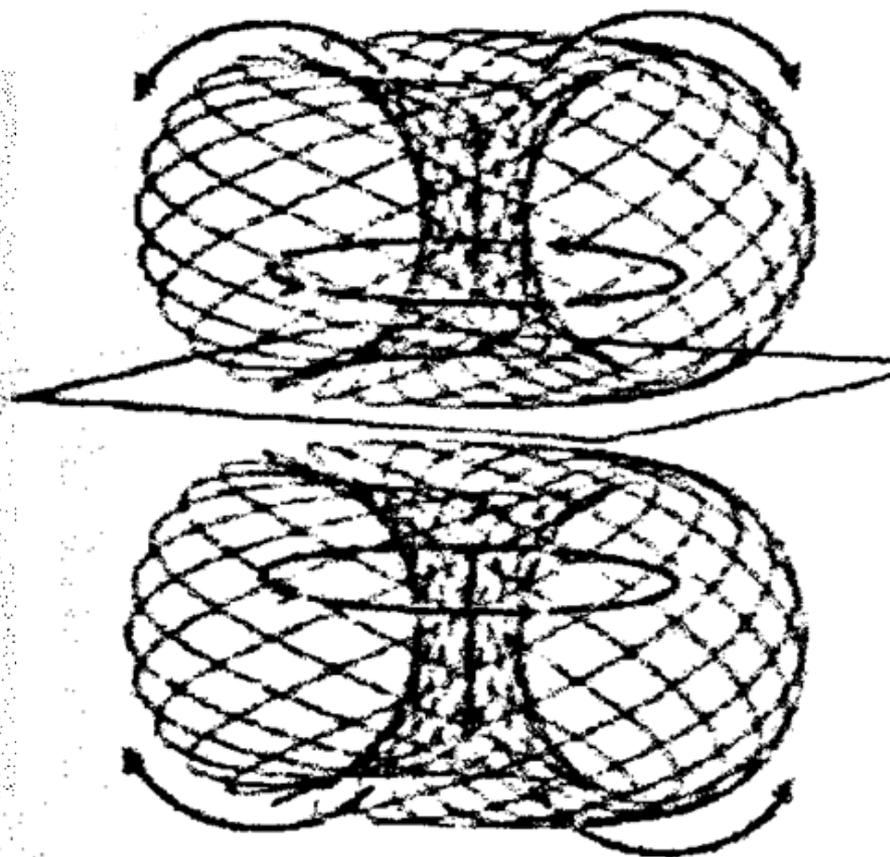
б

Схемы плавучей турбулентной струи в виде «гирлянды» сферических вихрей (а) и непрерывной восходящей газо-паровой струи с «грибовидными шапками» (б)

**Shraiman B.I., Siggia E.D. // Nature, 2000. V. 405. No. 8. P. 639 – 646**  
**Вульфсон А.Н., Николаев П.В. // Изв. РАН. ФАО, 2017. № 53(4). С. 477 – 486**



а



б

Фотография (а) и компьютерная модель (б) кольцевого вихря

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.

М.: Наука, 1973

# Основные свойства магнитогидродинамической аналогии

Существует магнитогидродинамическая аналогия (МАГДА) между системами уравнений гидродинамики идеальной жидкости и равновесных магнитогидродинамических (МГД) конфигураций:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}, \quad \nabla P = \nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} \right) = [\vec{\omega} \times \vec{v}]; \quad (1.a)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \nabla p_m = -[\vec{j} \times \vec{H}]; \quad (1.b)$$

Из (1.b) следует  $(\vec{H} \cdot \nabla p_m) = (\vec{j} \cdot \nabla p_m) = 0$ , поэтому магнитные силовые линии и линии электротока лежат на так называемых «магнитных» поверхностях, где  $p_m = \text{const}$

В осесимметричных МГД-процессах важную роль играют записанные в цилиндрических координатах поля вида

$$\vec{H} = \{H_r(r, z); H_\theta(r, z); H_z(r, z)\} \quad (2)$$

# Морфология магнитных полей и токов (прямая задача)

Такие поля удобно разложить на полоидальную и тороидальную (азимутальную) компоненты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = \vec{H}_{\Pi} + \vec{H}_{\theta} \\ \vec{H}_{\Pi} = \{H_r; 0; H_z\} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H}_{\theta} = \vec{j}_{\Pi} \\ \text{div } \vec{H}_{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H}_{\Pi} = \vec{j}_{\theta} \\ \text{div } \vec{H}_{\Pi} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Поскольку  $\text{div } \vec{H} = 0$  и  $\text{div } \vec{j} = 0$ , можно ввести функцию  $\psi$  магнитного потока и функцию  $J$  электрического тока такие, что

$$H_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad j_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial J}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{r} \frac{\partial J}{\partial r}$$

Из  $\frac{D(p_m, \psi)}{D(r, z)} = \frac{D(p_m, J)}{D(r, z)} = 0$  следует, что  $p_m = f(\psi)$ ,  $J = F(\psi)$ , поэтому

$$\Delta^* \psi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r j_{\theta} \quad (4)$$

# Уравнение Грэда-Шафранова и его особое решение

Если выразить  $j_\theta$  через  $\psi$ , можно получить уравнение

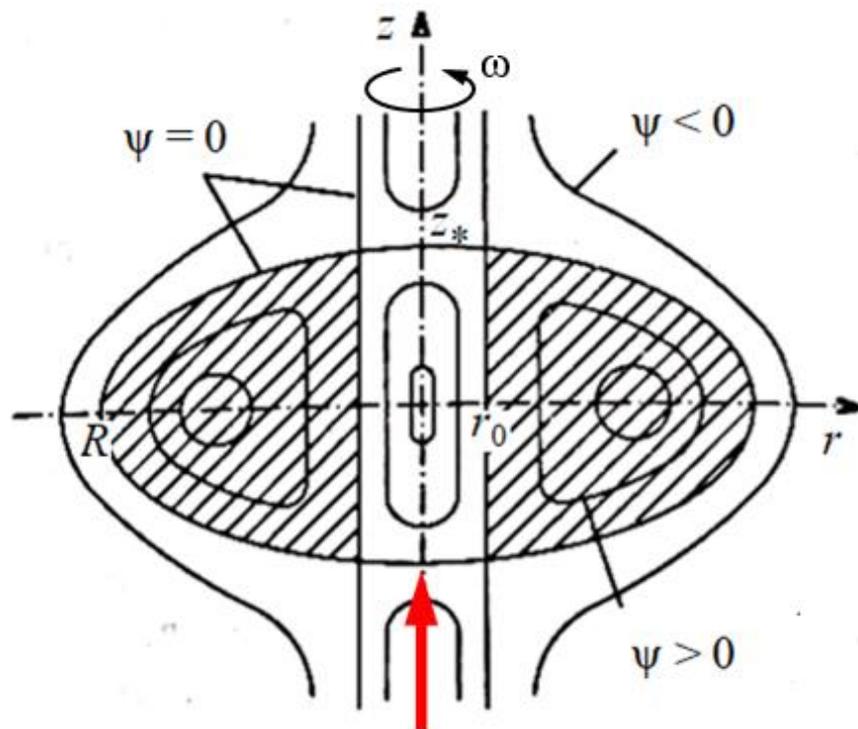
$$\Delta^* \psi = Ar^2 p'_m(\psi) - B \frac{dJ^2}{d\psi} = Ar^2 p'_m(\psi) - 2BJ(\psi)J'(\psi), \quad A, B = \text{const} \quad (5.a)$$

Если взять  $p'_m(\psi) = \text{const}$ ,  
 $J^2(\psi) = a\psi + b$ ,  $a, b = \text{const}$ ,  
можно получить решение

$$\psi = C \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{z^2}{z_*^2} \right), \quad (5.b)$$

где  $r_0 = r_{\min}$ ,  $R = r_{\max}$ ,  $z_* = z_{\max}$

По МАГДА можно рассчитать поля  $\vec{v}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\nabla P$ , а для завершения модели торнадоциклона надо добавить восходящее вихревое течение



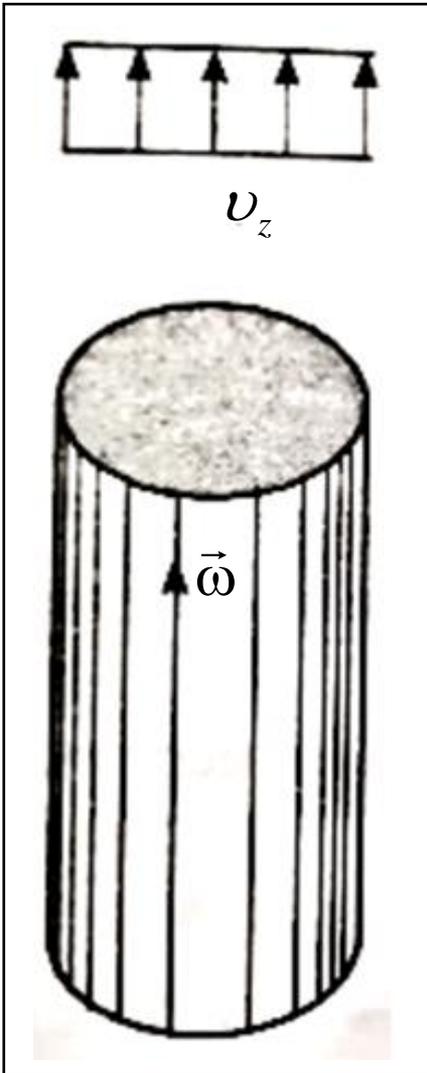
Токамак с  $D$ -образным сечением шнура: сечения магнитных поверхностей  $\psi(r, z) = \text{const}$ . Заштрихована внутренность сепаратрисы

# Основные гидродинамические вопросы подпитки торнадо-циклона

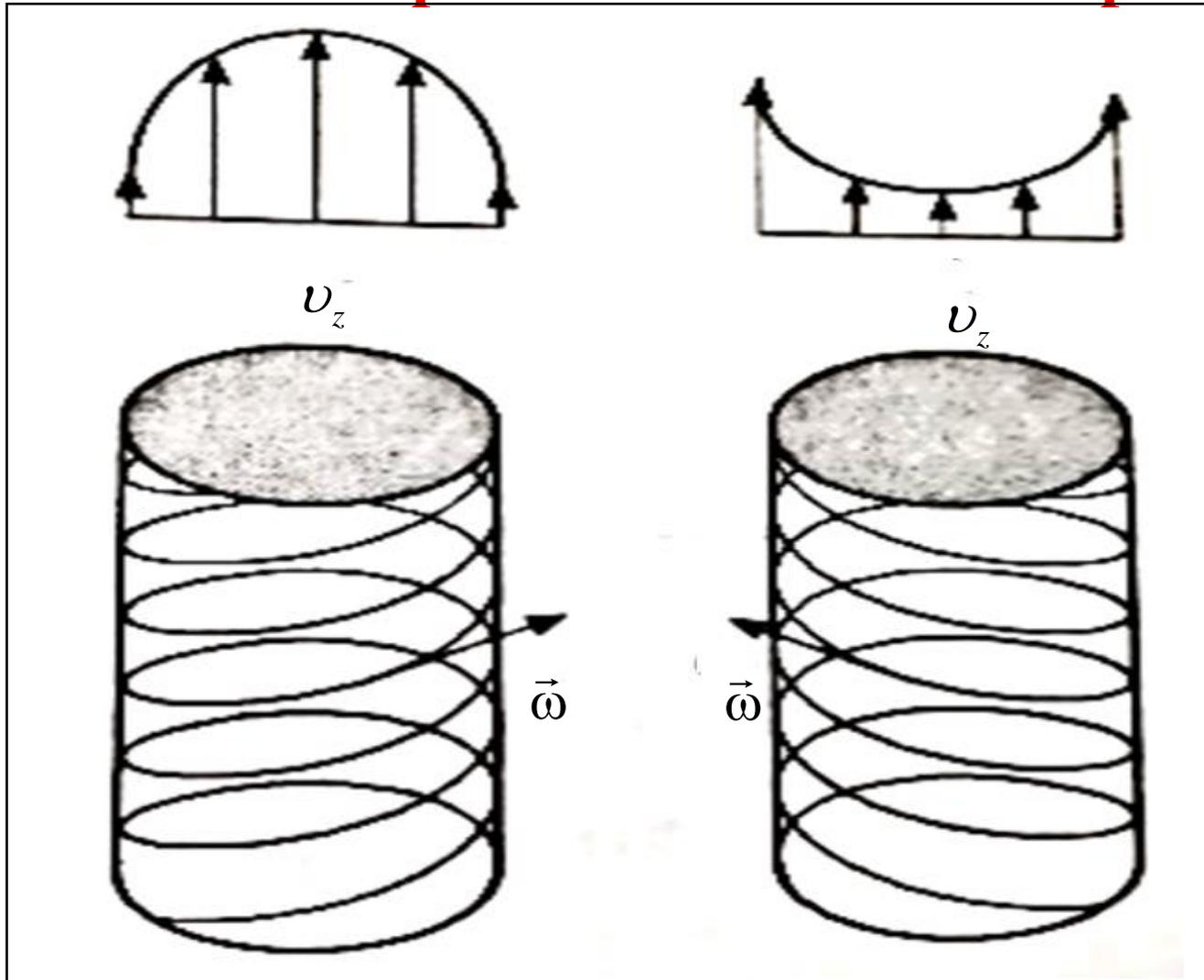
Смерч-вихрь колоннообразной формы, который подпитывает торнадо-циклон, может быть частным случаем течения Громеко – Бельтрами, когда поля  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$  коллинеарны. Тогда для функции тока  $\psi$  можно получить аналог уравнения Грэда – Шафранова:

$$\Delta^* \psi = r^2 \frac{d\Pi}{d\psi} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\psi} = -r\omega_\theta, \quad \Pi(\psi) = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz, \quad (6)$$

где  $\Pi(\psi)$  – функция Бернулли,  $\Gamma = rv_\theta$  – аналог циркуляции, которые нужно правильно подобрать. Такие течения называются циркуляционными вихревыми потоками. Однако возможны и винтовые вихри, где  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$  неколлинеарны.



# Осесимметричные винтовые вихри



Осесимметричные винтовые вихри с паузейлевским (слева) и антипаузейлевским (справа) профилями вертикальной скорости

В качестве вихря, подпитывающего торнадо-циклон, можно рассмотреть осесимметричное винтовое течение с полем завихренности

$$\omega_r = 0, \quad \omega_\theta = -\frac{r}{l} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r M^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) - 2V_0 \frac{M^4}{l} \right], \quad \omega_z = \omega_\theta \frac{l}{r}, \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

где  $\psi_1$  – гидродинамическая функция тока,  $V_0 = \text{const}$ ,  $l = \text{const}$ ,  $M = l^2 / (r^2 + l^2)$ .

Для такого течения поля скорости и давления имеют вид

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \int_0^r x \omega_z(x) dx, \quad v_z = V_0 - l v_\theta / r, \quad p = p_0 + \rho \int_0^r u_\theta^2 \frac{dx}{x}.$$

Далее распределение давления в винтовом вихре нужно согласовать с полем давлений во всем торнадо-циклоне. При этом из МАГДА, предположения  $dp_m/d\psi = \text{const}$  и формулы (5.b) следует:

$$p_m = C_1 \cdot \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{z^2}{z_*^2} \right) + C_2,$$

где постоянные  $C_1$ ,  $C_2$  находятся из условия согласования давлений.

**Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003**

# Морфология тороидальных магнитных полей (обратная задача)

Вместо «угадывания»  $p_m(\psi)$ ,  $J(\psi)$  и решения уравнения (5.a) с проверкой нужной топологии семейства  $\psi=\text{const}$  можно поступить наоборот: задать нужное семейство  $\psi$ , а затем найти  $\vec{B}$  и  $\vec{j}$ . Тогда

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = [\nabla\psi \times \nabla\theta] - \alpha(\psi) [\nabla\psi \times \nabla\varphi] \quad (7)$$

где  $\theta$ ,  $\varphi$  – угловые координаты для  $\vec{B}_\Pi$  и  $\vec{B}_\theta$ . В частности, для семейства

$$\psi(r, z, \theta) = B_0 \left[ (r - r_*)^2 + z^2 h(\theta) \right] = \text{const}, \quad 0 < h(\theta) = 1 + \sum_k a_k \sin k\theta \quad (8.a)$$

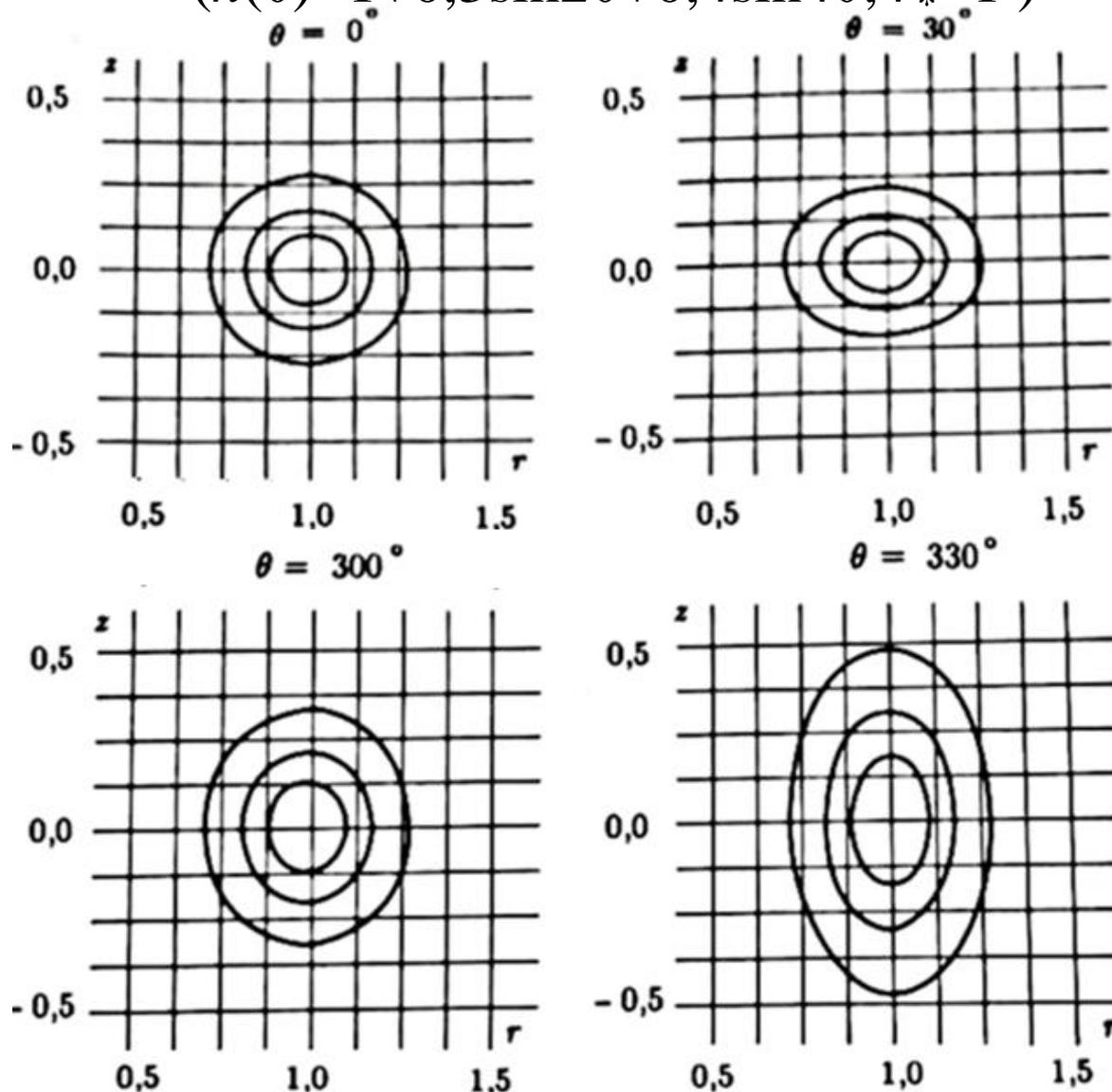
где  $r_*$  – радиус магнитной оси,  $h(\theta)$  – периодическая функция «гофрировки», можно при выборе  $\alpha(\psi)=\text{const}$ ,  $h(\theta)=1$ ,  $\varphi = \text{arctg}[z / (r - r_*)]$  получить простые формулы для магнитного поля:

$$B_r = -\frac{2z}{r} B_0, \quad B_\theta = 2\alpha B_0, \quad B_z = -\frac{2(r - r_*)}{r} B_0, \quad (8.b)$$

а из уравнения  $\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j}$  найти компоненты электрического тока.

# Результаты численной трассировки трех силовых линий

$$(h(\theta)=1+0,3\sin 2\theta+0,4\sin 4\theta; r_*=1)$$



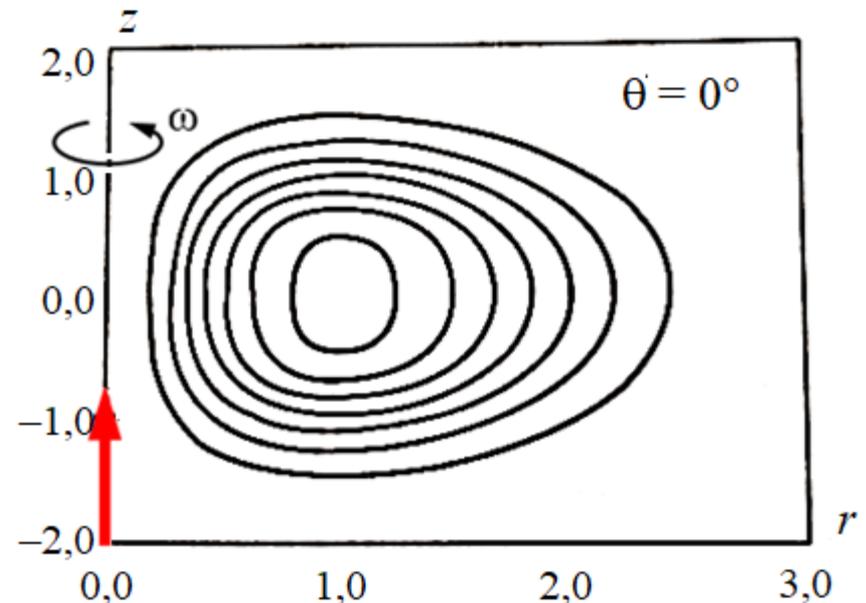
# Аналог токамака с $D$ -образным сечением в обратной задаче

Если взять обобщение семейства (8) в виде

$$\psi(r, z, \theta) = B_0 \left[ (r - r_*)^2 + z^2 + r_*^2 \right] \left( \frac{r}{r_*} \right)^2 \exp \left( -\frac{r^2 + z^2}{r_*^2} \right) = \text{const},$$

то можно получить аналог токамака со сглаженным  $D$ -образным сечением и «дыркой» вблизи оси  $z$ . Это дает пример с убыванием поля  $\vec{B}$  при  $r, z \rightarrow \infty$ , но с магнитными поверхностями в  $\mathbb{R}^3$ .

По МАГДА можно рассчитать поля  $\vec{v}$ ,  $\vec{\omega}$  и  $\nabla P$ , а в модели «быстрого» торнадо-циклона снова надо добавить восходящий смерч-вихрь вблизи оси  $z$ .



# Вывод

Магнитогидродинамическая аналогия между квазистационарными магнитными конфигурациями в теории управляемого термоядерного синтеза и уравнениями идеальной гидродинамики завихренной жидкости позволяет на качественном уровне (без учета фазовых переходов) описать быструю генерацию и подпитку торнадо-циклона восходящими смерч-вихрями дегазационной природы, которые играют роль триггера. В таких случаях основной вклад в закрутку торнадо-циклона вносят не силы Кориолиса, а силы электромагнитной природы.

**Спасибо за внимание!**