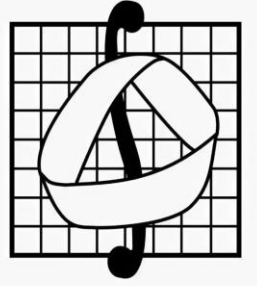




Шестая Международная конференция
"Триггерные эффекты в геосистемах"



**Поведение напряжений в
окрестности особых точек и
особых линий для трещин в
упругом материале**

Звягин А.В., Лужин А.А., Шамина А.А.

Кафедра газовой и волновой динамики
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова

2021 Численный метод разрывных смещений в пространственных задачах механики трещин

Звягин А.В., Лужин А.А., Панфилов Д.И., Шамина А.А.

в журнале Известия Российской академии наук.

Механика твёрдого тела, № 1, с. 148-162

2021 A Method to Find Stress Intensity Coefficients for Spatial Cracks

Zvyagin A.V., Panfilov D.I., Luzhin A.A., Shamina A.A.

в журнале Moscow University Mechanics Bulletin, издательство Allerton Press Inc. (United States), том 76, № 2, с. 35-43

2022 Boundary element method for investigating large systems of cracks using the Williams asymptotic series

Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A.

в журнале Acta Astronautica, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom), том 194, с. 480-487

2021 Stress intensity factors for branching cracks in space structures

Zvyagin A.V., Luzhin A.A., Smirnov N.N., Shamina A.A., Shamin A.Y.

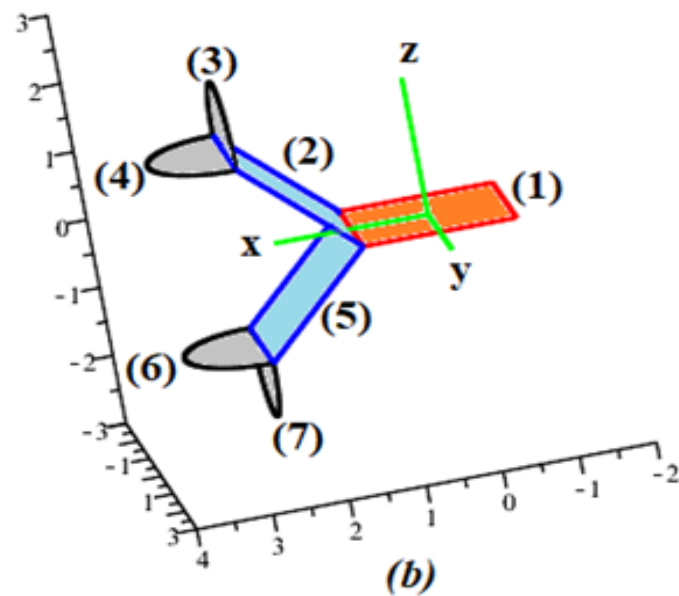
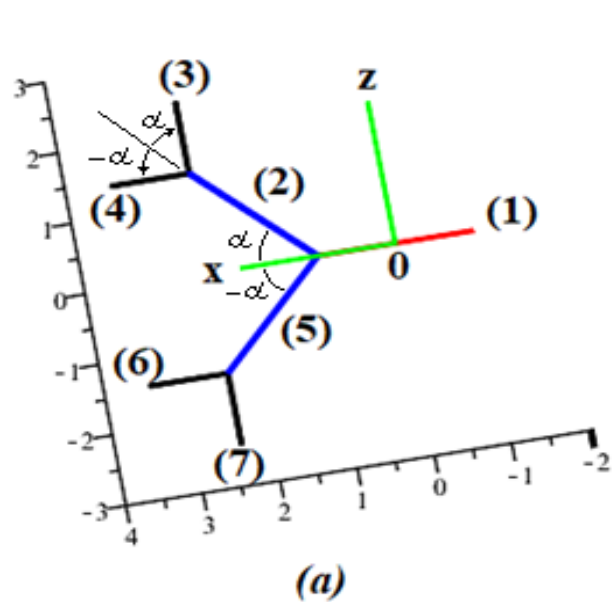
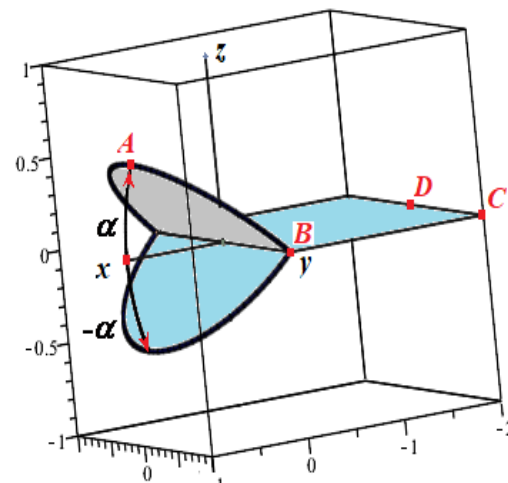
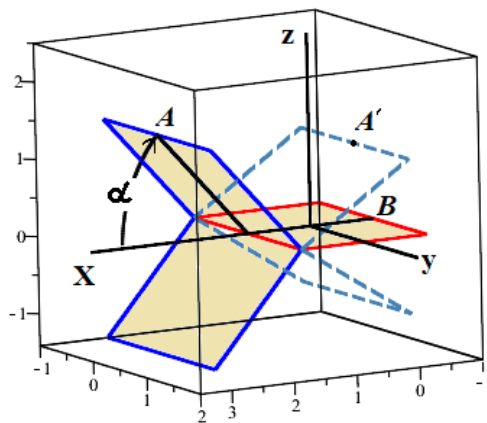
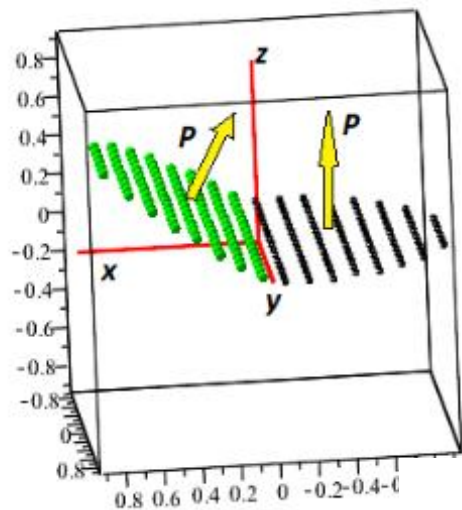
в журнале Acta Astronautica, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom), том 180, с. 66-72

2021 Computational modeling of cracks different forms in three-dimensional space

Shamina A.A., Zvyagin A.V., Smirnov N.N., Luzhin A.A., Panfilov D.I., Udalov A.S.

в журнале Acta Astronautica, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom), том 186, с. 289-302

Набор рассмотренных задач с наличием особых точек и особых линий

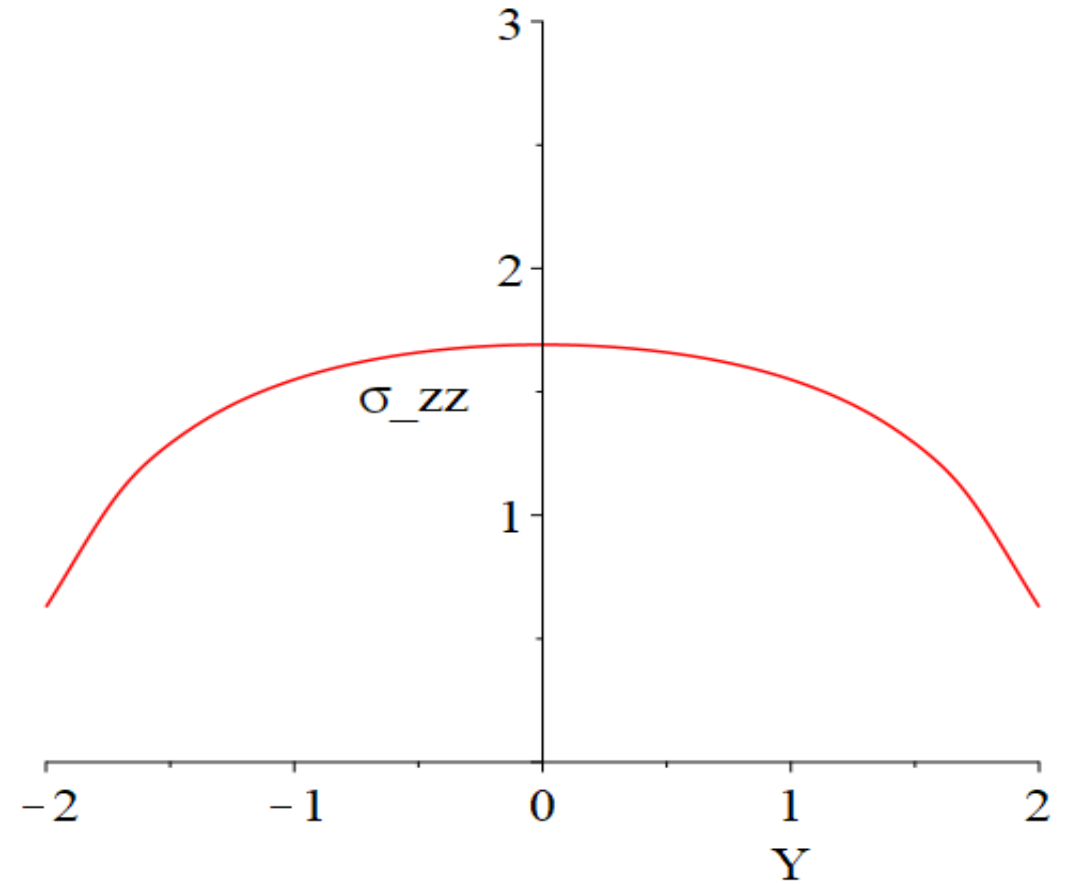
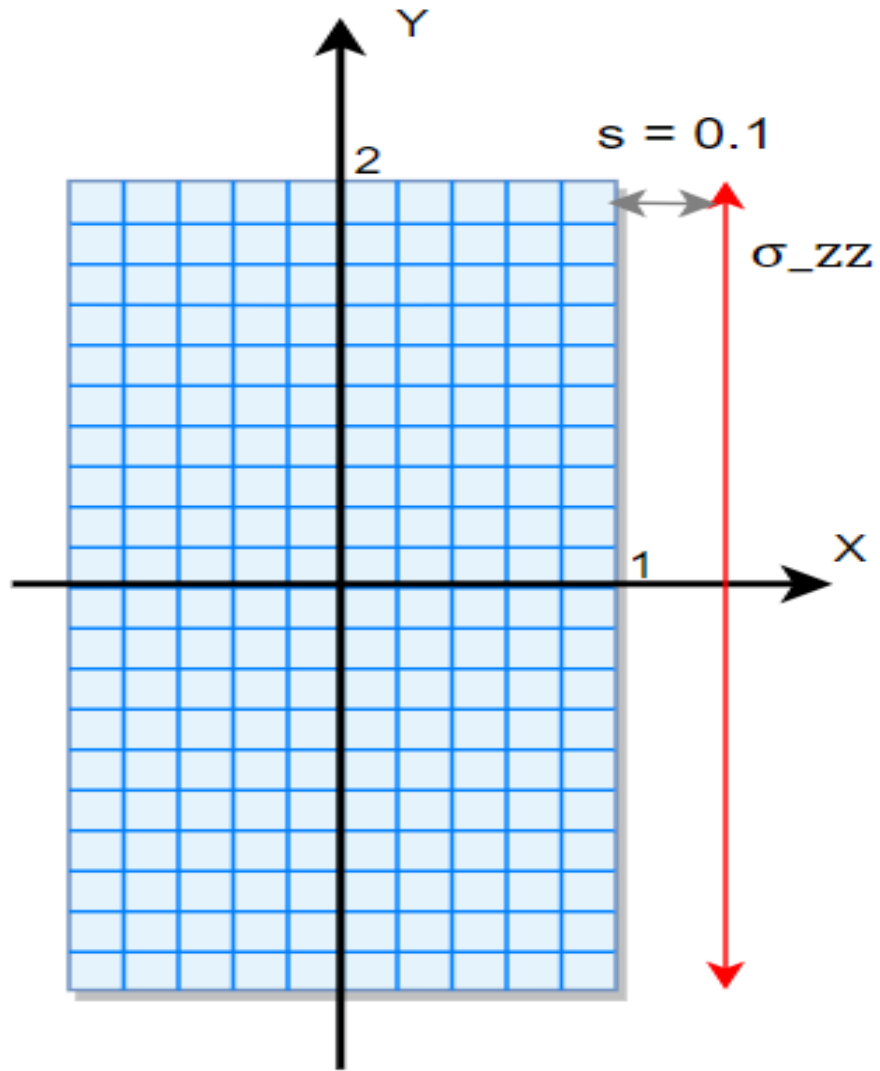


Наличие угловых особых точек границы трещины и линий излома её поверхности приводит к необходимости исследования поведения напряжений в окрестности этих точек и линий

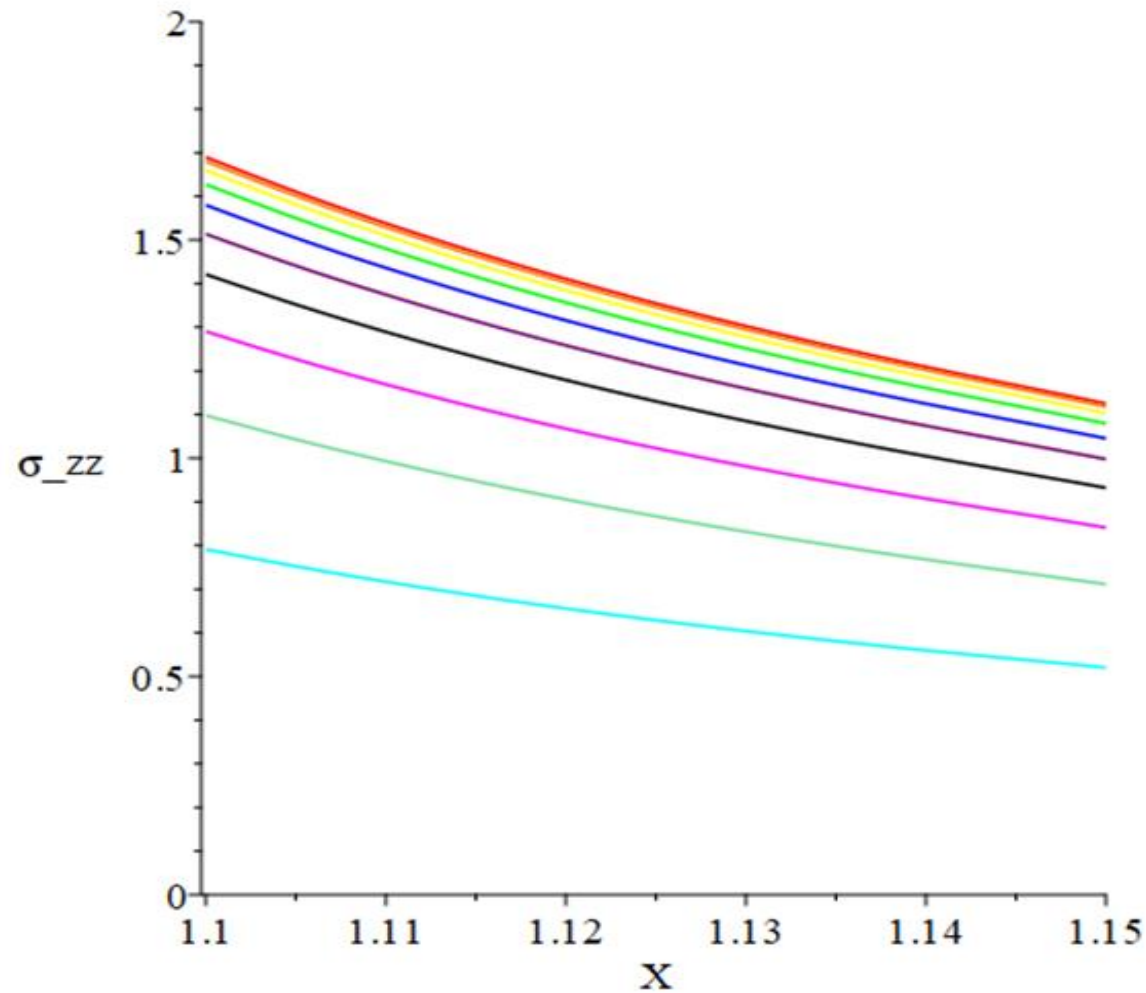
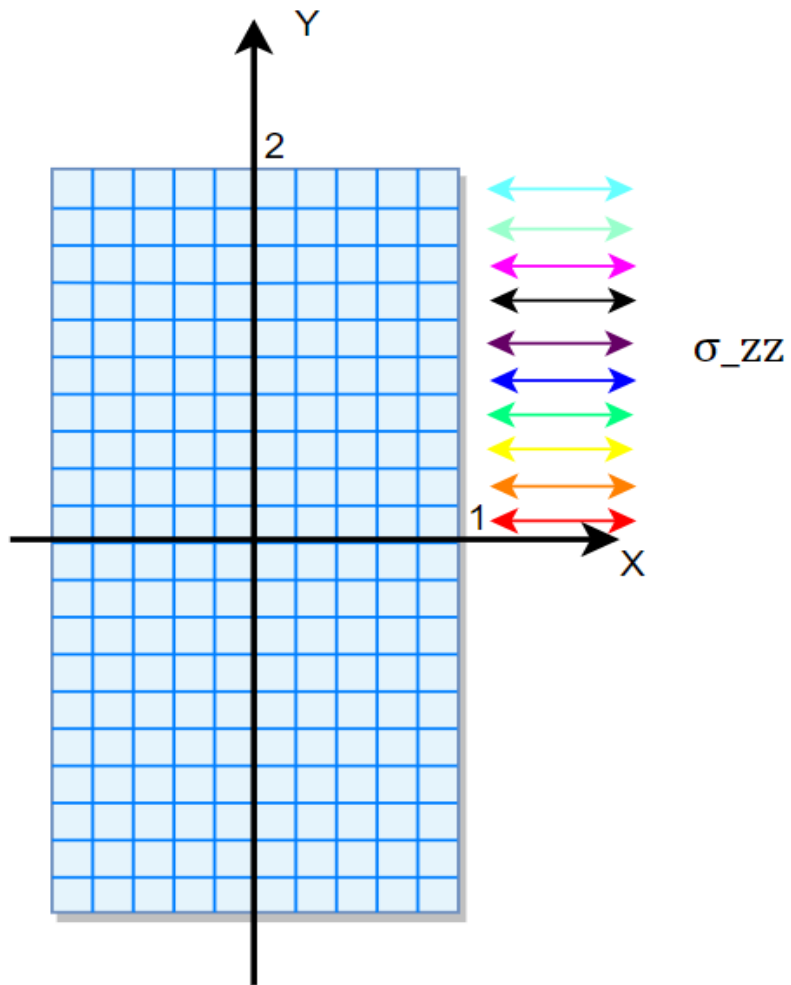
Поскольку решение находится численно, возникает вопрос о возможности аналитического описания асимптотического поведения напряжений в окрестности особых точек и линий

Темой настоящего доклада является исследование возможности аналитического описания асимптотического поведения напряжений в окрестности угловой точки границы и в окрестности линии излома

Напряжения в окрестности границы прямоугольной трещины

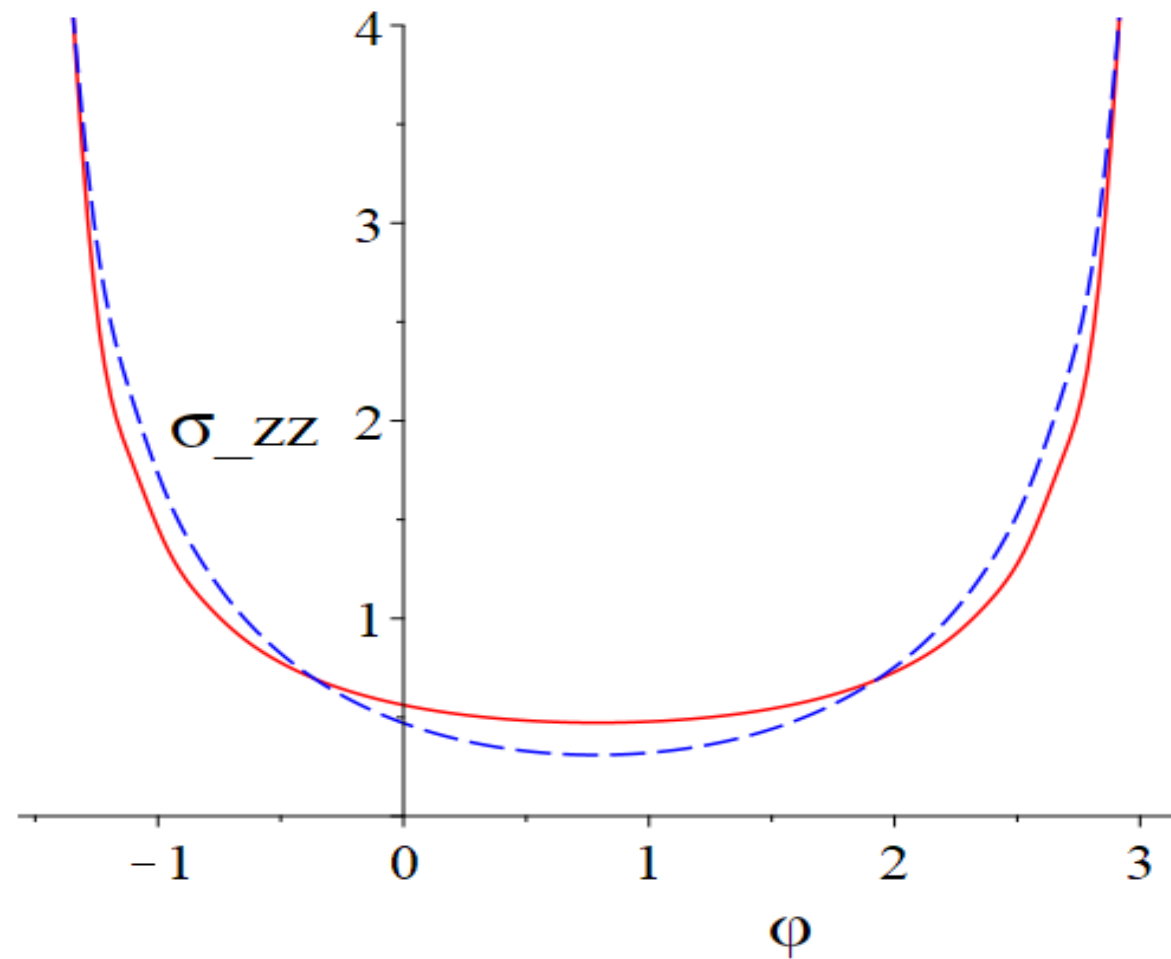
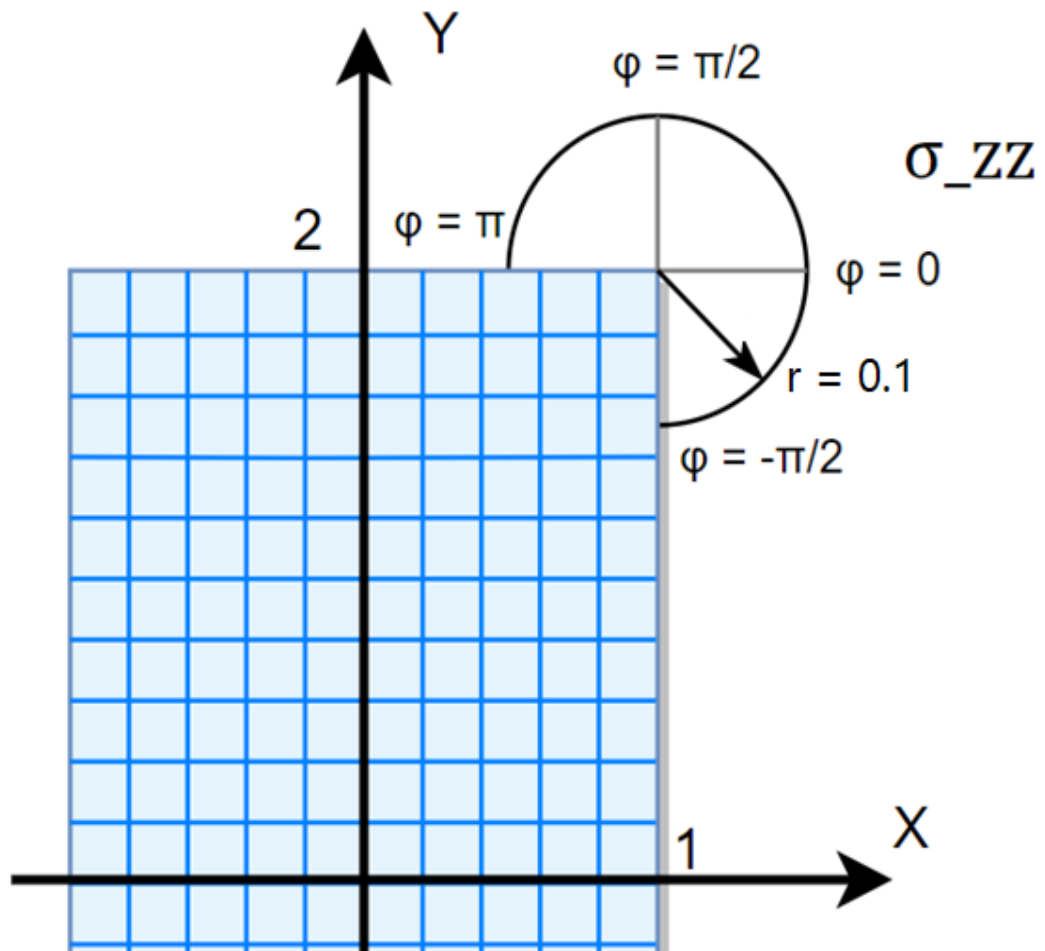


Распределение напряжений вдоль стороны

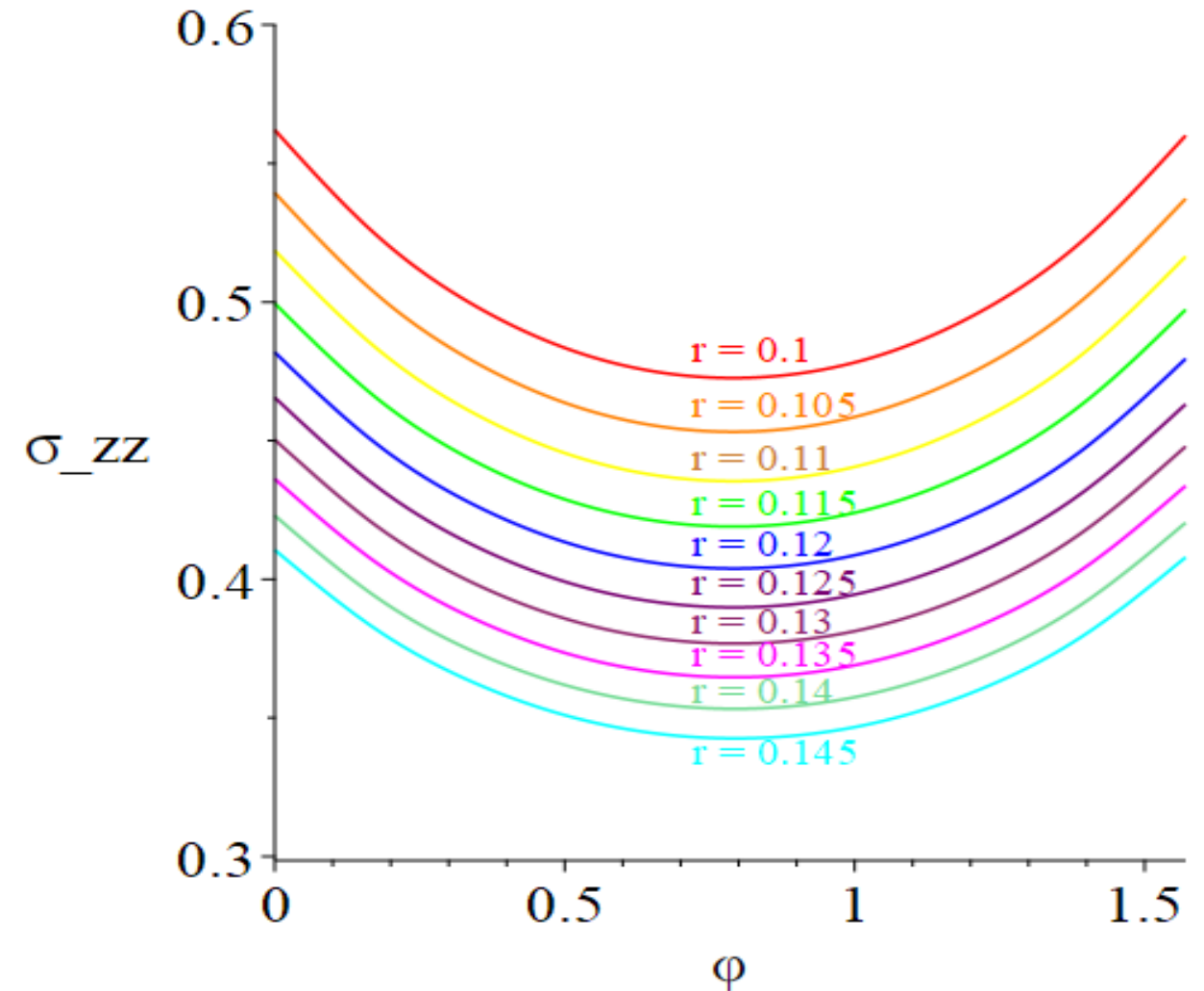
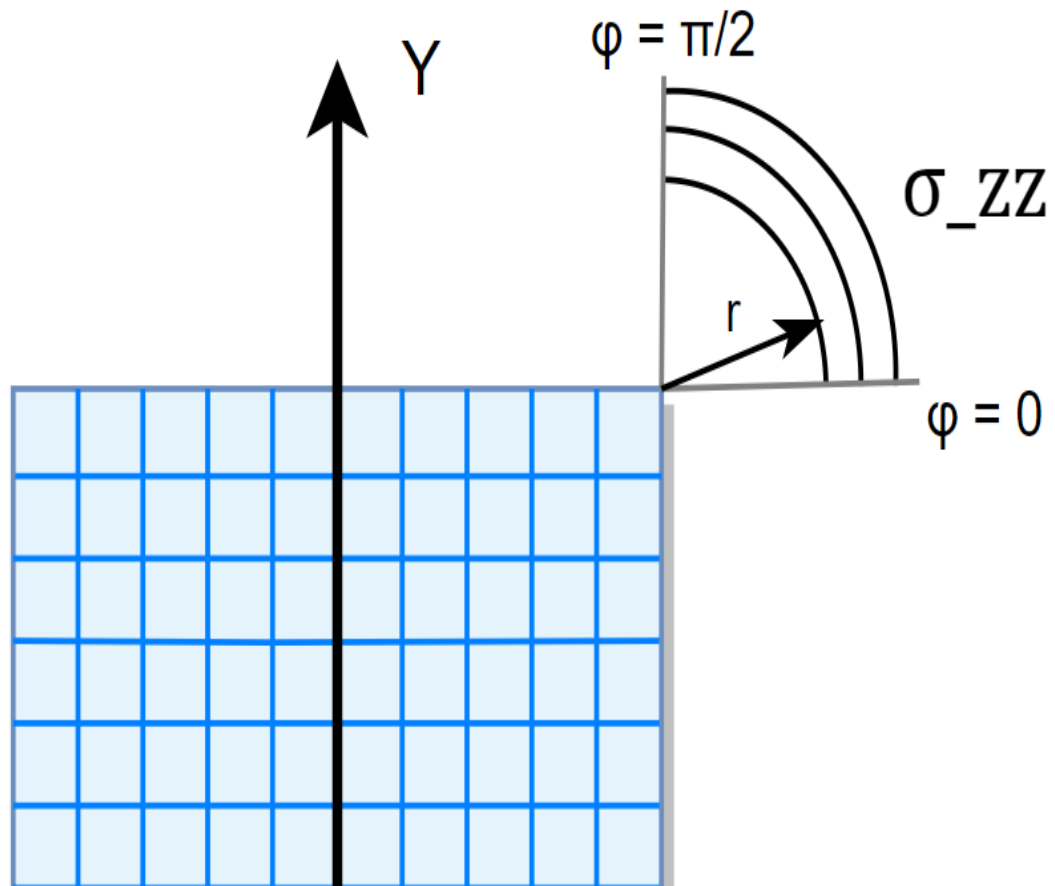


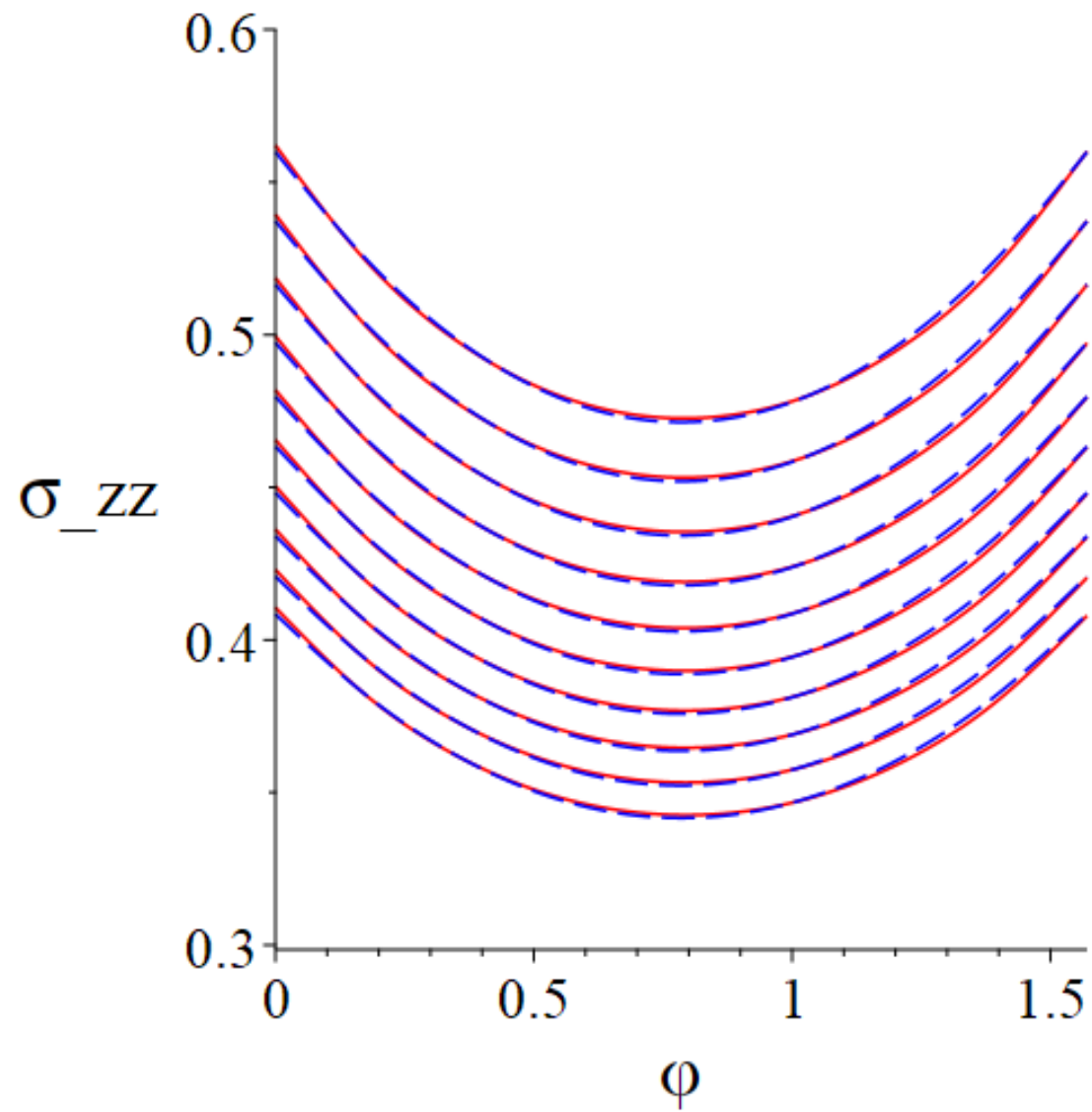
Распределение напряжений в зависимости от расстояния до стороны прямоугольника

Распределение напряжений в зависимости от угла в окрестности угловой точки



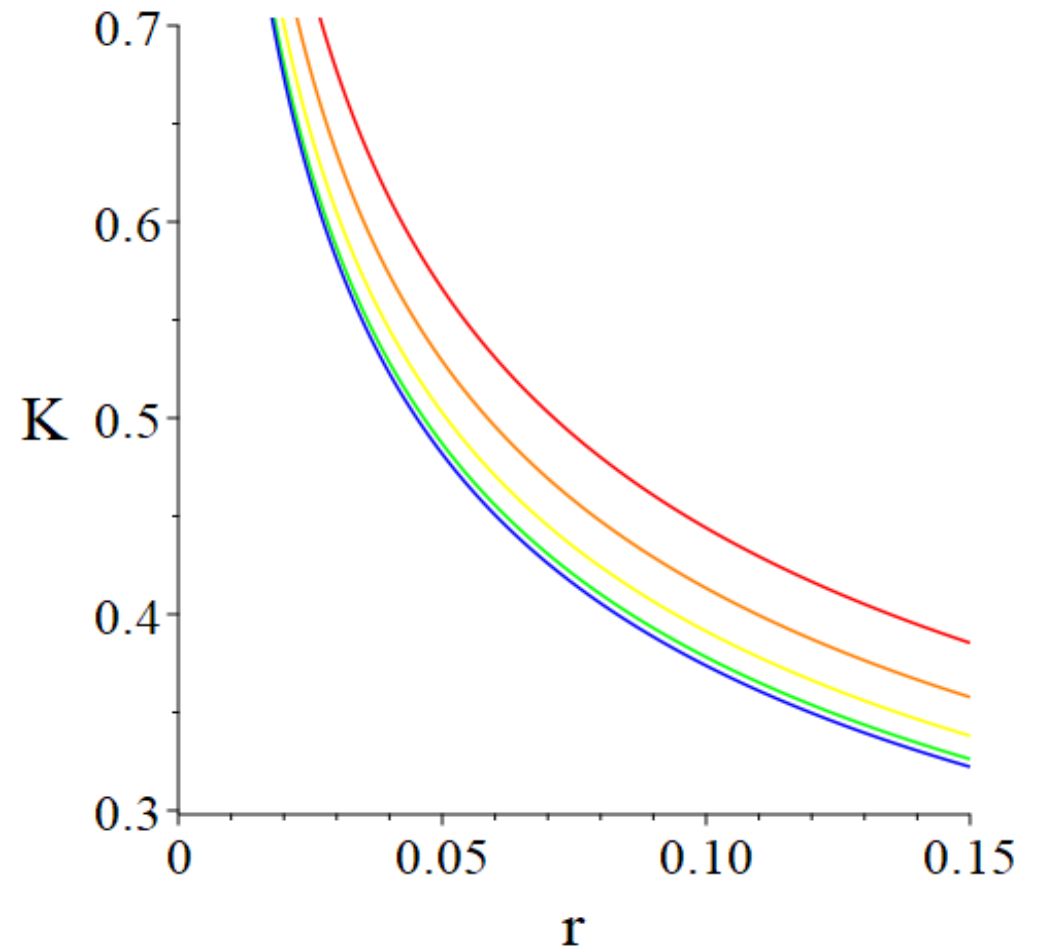
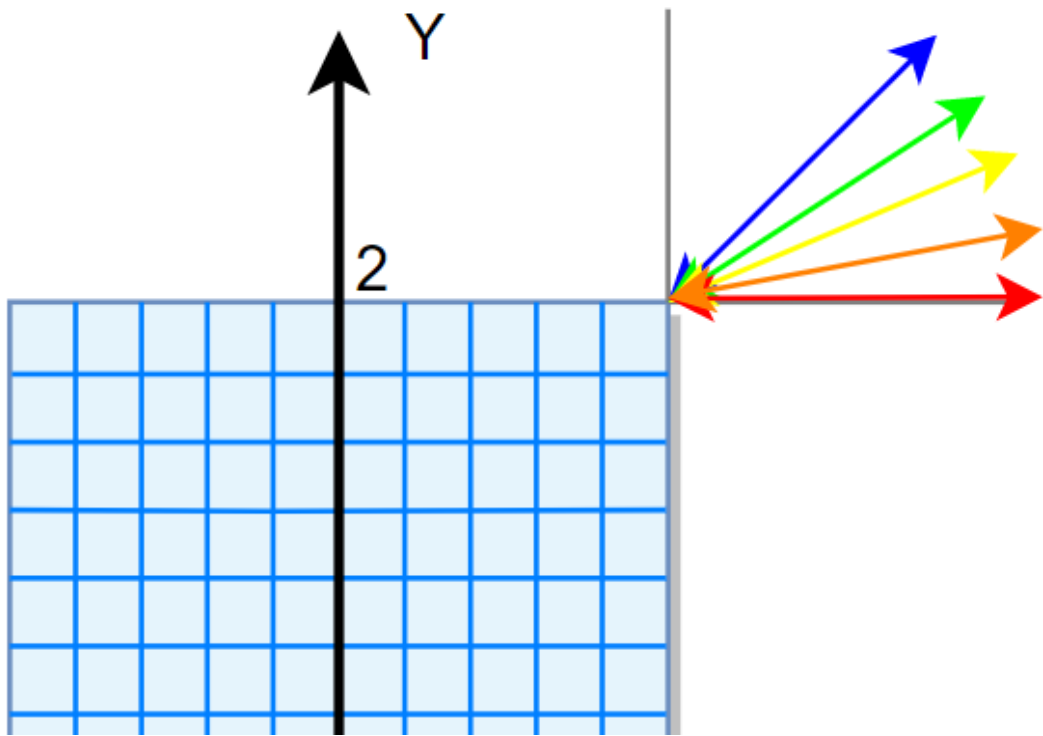
Распределение напряжений от угла для разных расстояний от угловой точки





$$\sigma_{zz}(r, \varphi) = 0.0642 \cdot r^{-0.866} + 0.0249 \cdot r^{-0.761} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right)^2$$

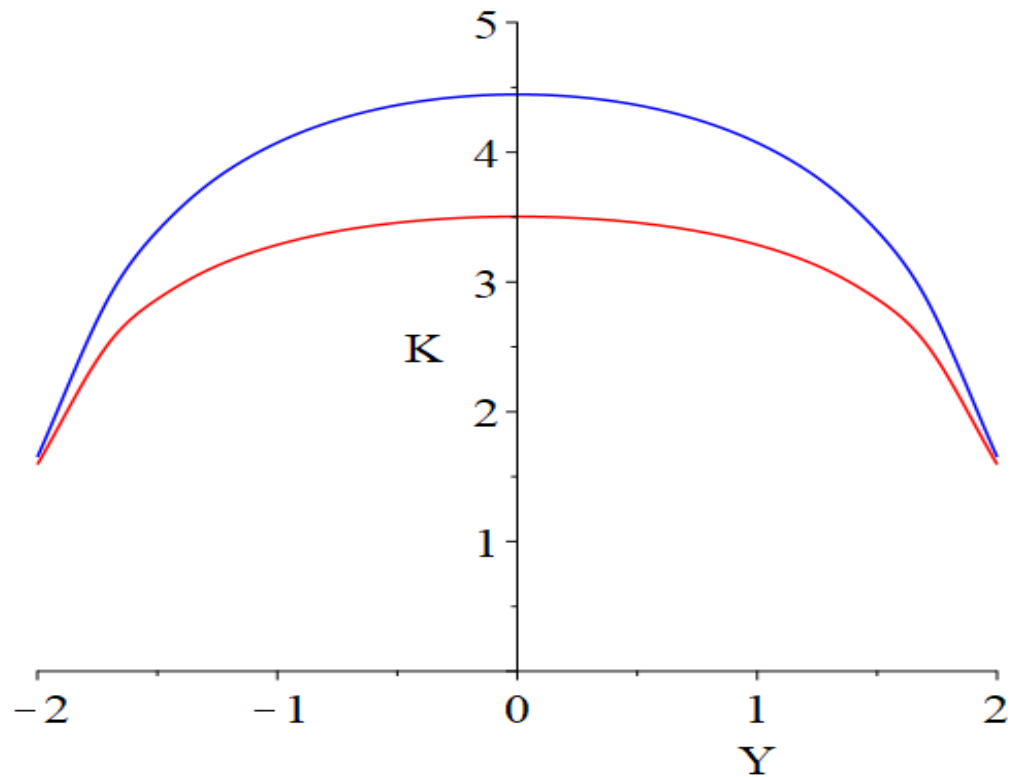
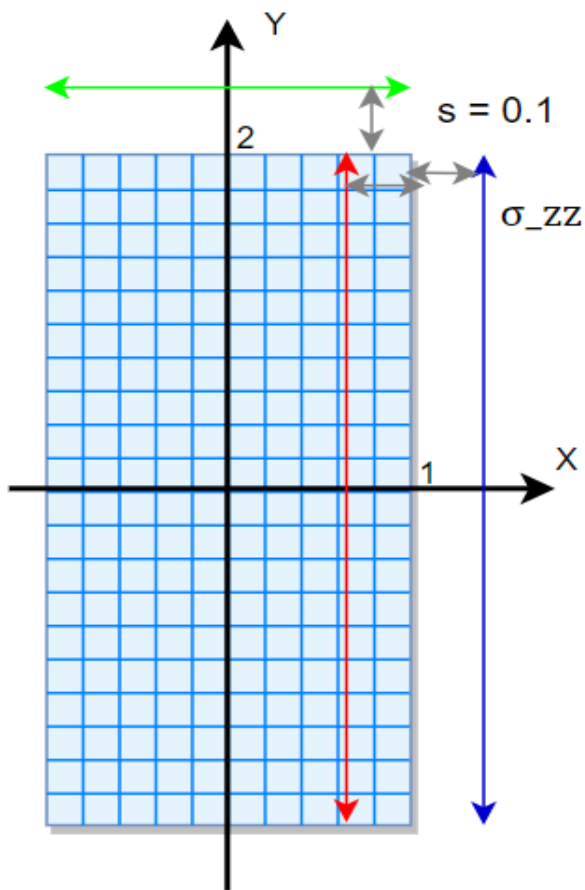
$$K = \sqrt{2\pi r \sigma_{zz}}$$



Определение коэффициента интенсивности напряжений методом напряжений перемещений

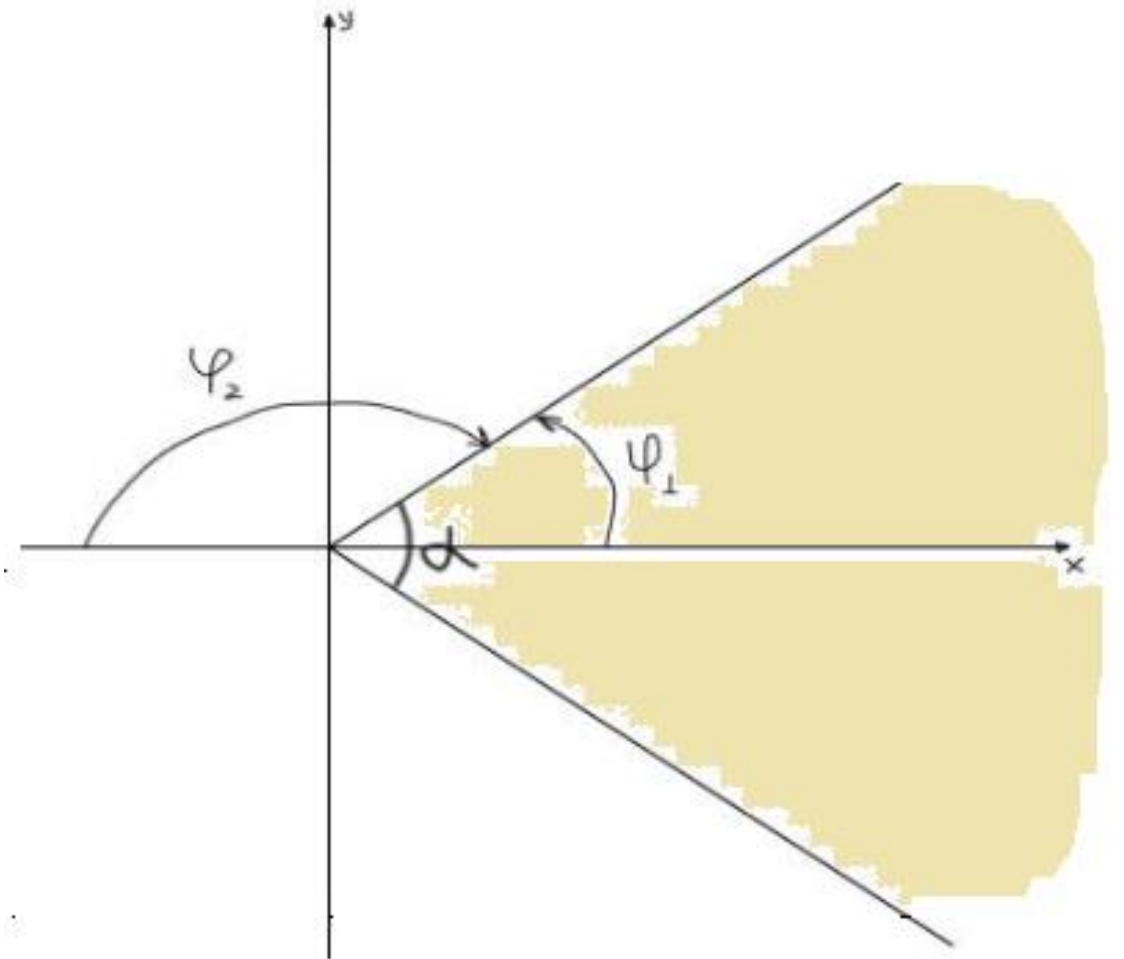
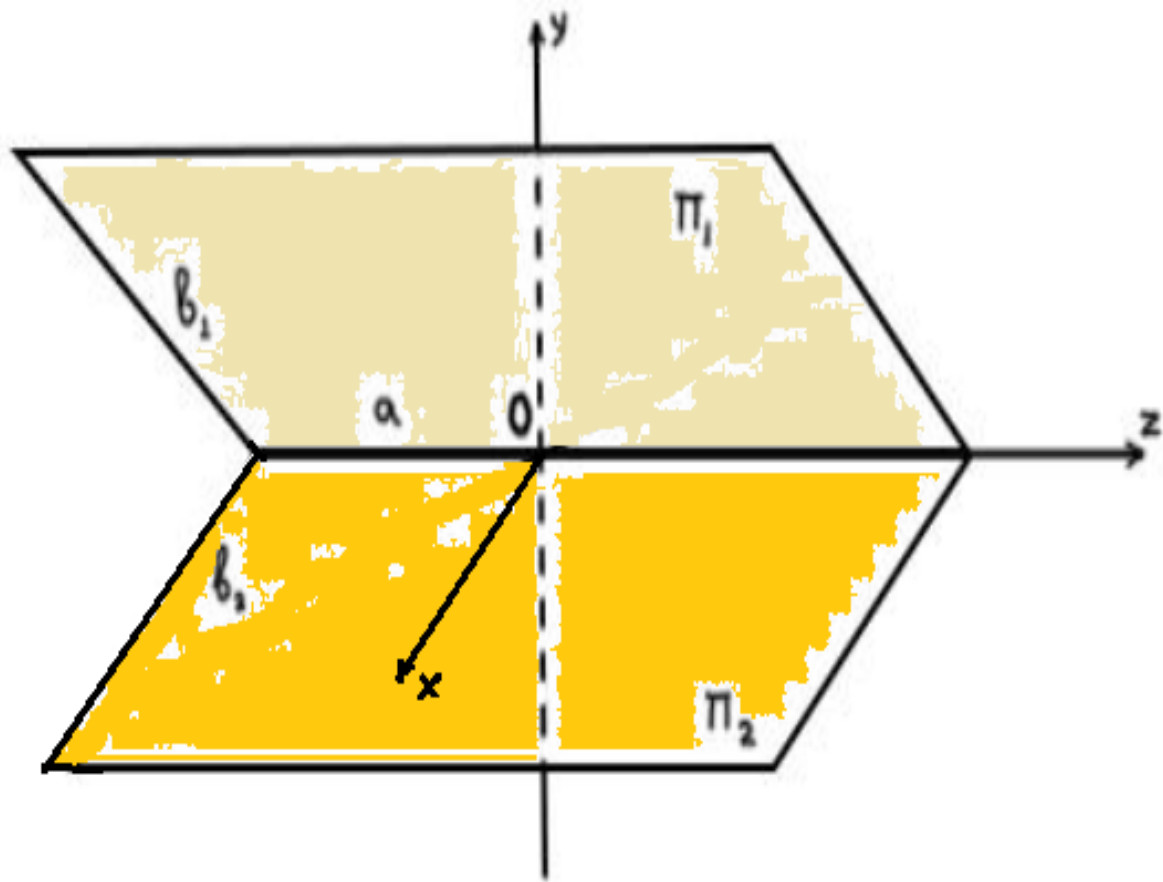
$$K = \sqrt{2\pi r} \sigma_{zz}$$

$$u_z = K \sqrt{\frac{s}{2\pi}} (2 - 2\nu)$$



Поведение напряжений в окрестности линии излома трещины

Метод однородных решений



В окрестности линии излома уравнения теории упругости
распадаются на плоскую задачу и задачу антиплоской
деформации

$$r \rightarrow 0$$

$$(\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - u_r \right] - (\lambda + 3\mu) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t \partial \varphi} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\mu \left[\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} - u_\varphi \right] + (\lambda + 3\mu) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t \partial \varphi} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} \right) = 0$$

Плоская постановка

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} \right] = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} \right] = 0$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$u_r = r^k f(\varphi) \quad qf'' + (k^2 - 1)f + [(k - 1) - q(k + 1)]g' = 0$$

$$u_\varphi = r^k g(\varphi) \quad g'' + q(k^2 - 1)g + [(k + 1) - q(k - 1)]f' = 0$$

$$f(\varphi) = A \cos[(1 + k)\varphi] + B \sin[(1 + k)\varphi] + C \cos[(1 - k)\varphi] + D \sin[(1 - k)\varphi]$$

$$g(\varphi) = -A \sin[(1 + k)\varphi] + B \cos[(1 + k)\varphi] - pC \sin[(1 - k)\varphi] + pD \cos[(1 - k)\varphi]$$

$$r^{1-k} \frac{\sigma_{r\varphi}}{\mu} = -2kA \sin[(1 + k)\varphi] + 2kB \cos[(1 + k)\varphi] -$$

$$-(1 - k)(1 - p)C \sin[(1 - k)\varphi] + (1 - k)(1 - p)D \cos[(1 - k)\varphi]$$

$$r^{1-k} \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu} = -2kA \cos[(1 + k)\varphi] - 2kB \sin[(1 + k)\varphi] -$$

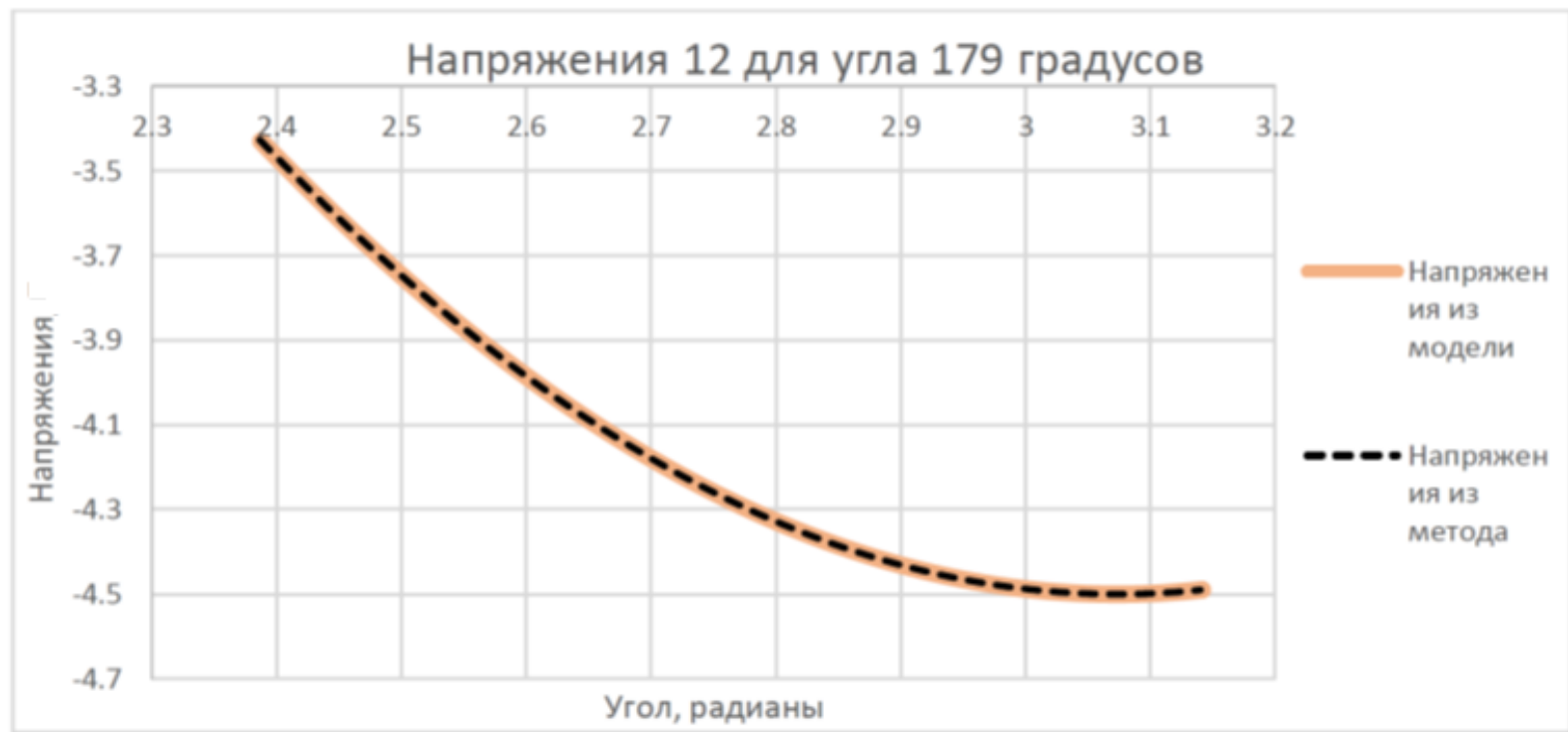
$$-(1 + k)(1 - p)C \cos[(1 - k)\varphi] - (1 + k)(1 - p)D \sin[(1 - k)\varphi]$$

$$-8k^2(-1 + p)^2(1 - k^2 + k^2 \cos 2\alpha - \cos 2k\alpha) = 0$$

$$\sigma_{zz}(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{n_k} S_{zz}(k_i, r, \varphi) A_{zz}(k_i)$$

$$\sigma_{rz}(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{n_c} S_{rz}(c_i, r, \varphi) N_{rz}(c_i)$$

$$\sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = \sum_{i=1}^{n_c} S_{\varphi z}(c_i, r, \varphi) N_{\varphi z}(c_i)$$



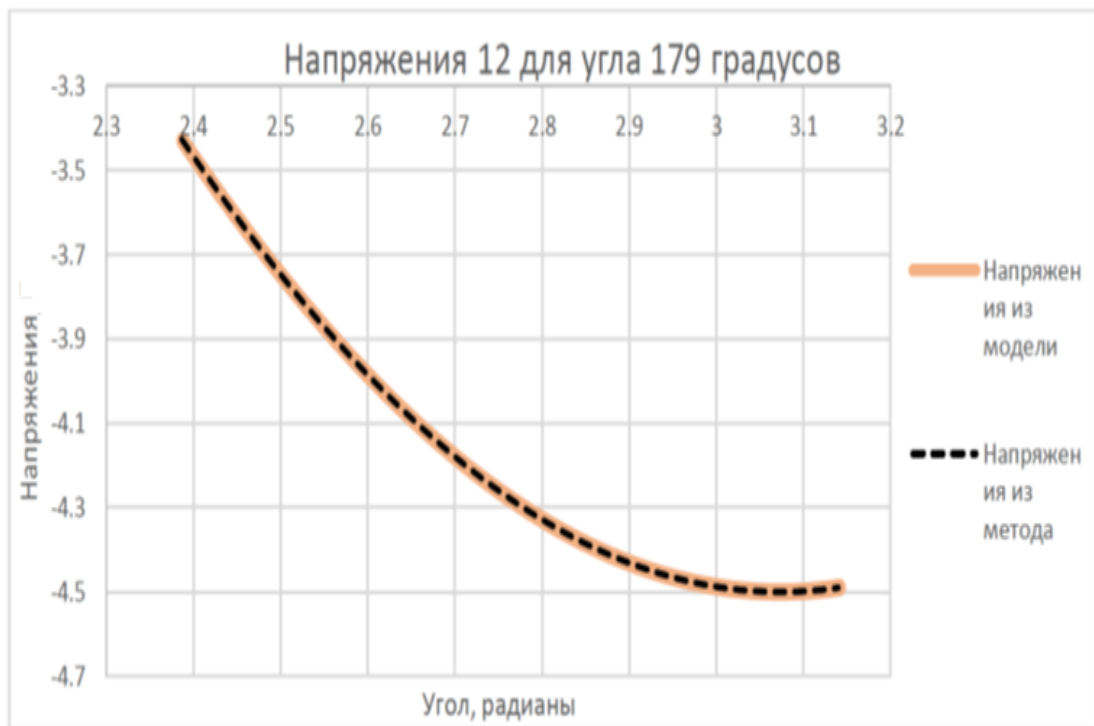
Зависимость компоненты $\sigma_{r\varphi}$ от угла

$$err = \frac{\sum_{i=1}^m |\sigma_{\text{МОД}}(r_i, \varphi_i) - \sigma_{\text{МЕТ}}(r_i, \varphi_i)|}{m}$$

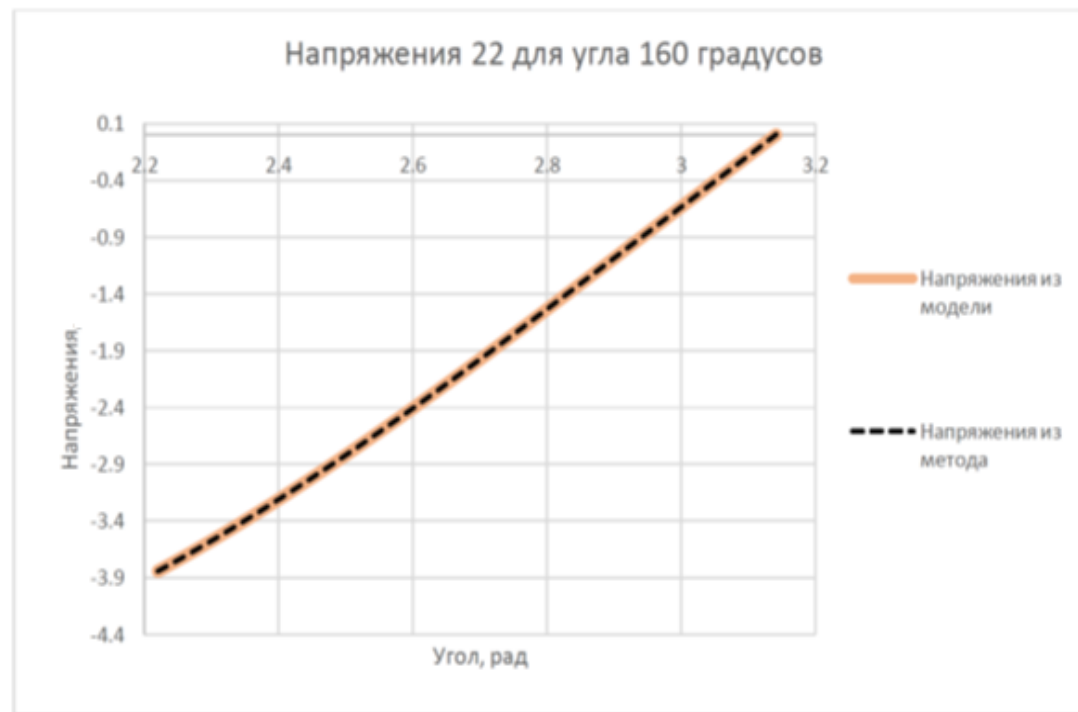


Зависимость компоненты $\sigma_{\varphi\varphi}$ от угла

Для компоненты $\sigma_{r\varphi}$ средняя погрешность составляет $\sim 3.5 * 10^{-5}$, а для $\sigma_{\varphi\varphi}$ $\sim 2 * 10^{-4}$.

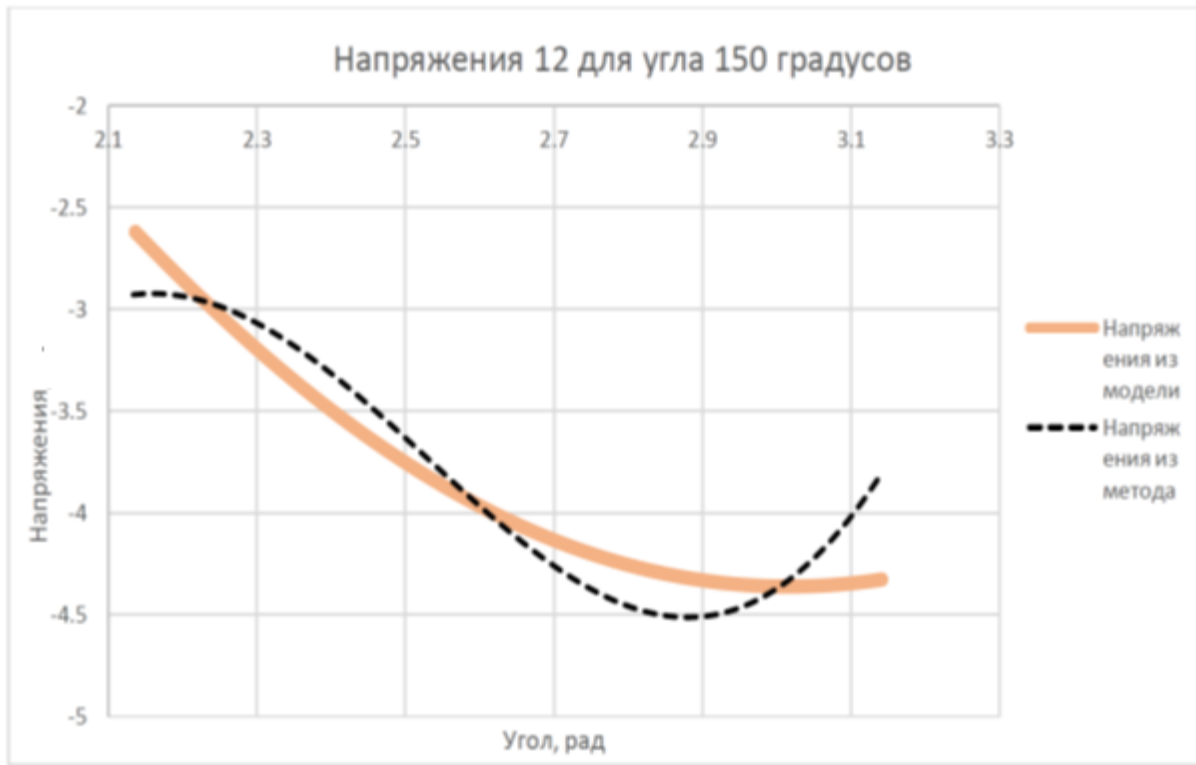


Зависимость компоненты $\sigma_{r\varphi}$ от угла

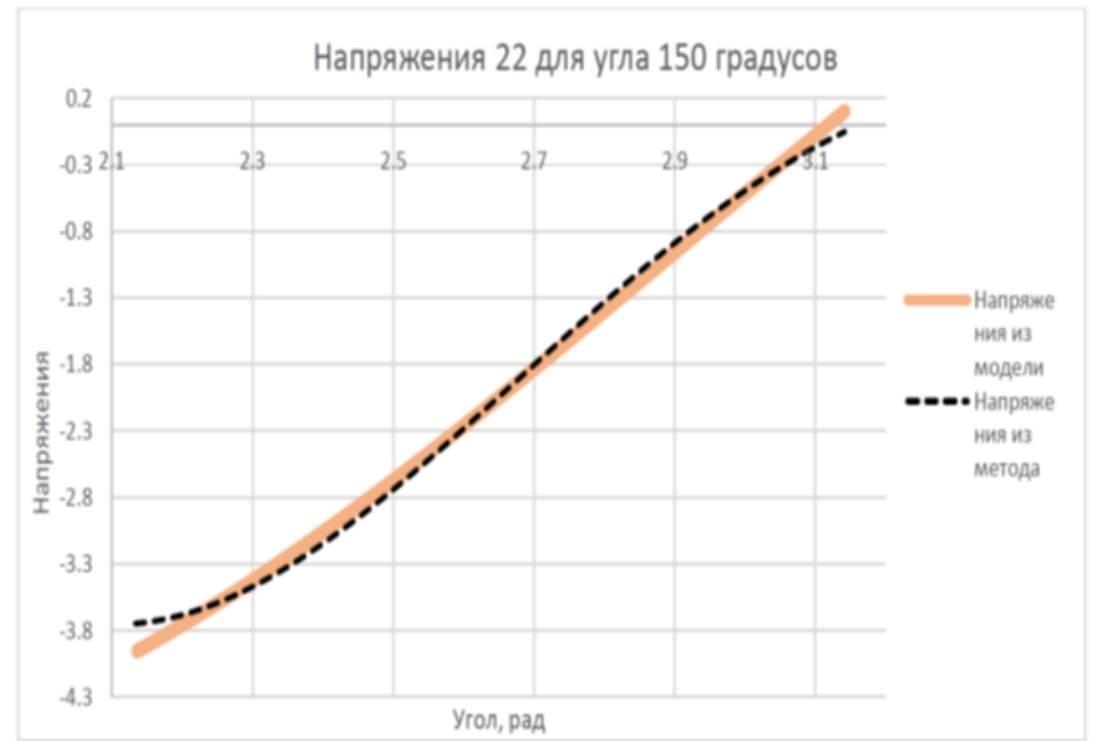


Зависимость компоненты $\sigma_{\varphi\varphi}$ от угла

Можно заметить, что на этот раз точность немного снизилась. Погрешность метода для этого угла составила $\sim 5 * 10^{-3}$ для $\sigma_{r\varphi}$ и $\sim 6 * 10^{-4}$ для $\sigma_{\varphi\varphi}$.



Зависимость компоненты $\sigma_{r\phi}$ от угла



Зависимость компоненты $\sigma_{\phi\phi}$ от угла

погрешность резко выросла и составила порядка 0.1.

Выводы

- 1. Для прямоугольной трещины максимальные напряжения реализуются в окрестности середин сторон границы трещины**
- 2. В угловой точке распределение напряжений по углу имеет вид параболы с минимумом на биссектрисе угла**
- 3. В случае роста прямоугольной трещины она будет стремиться стать круглой**
- 4. Использование метода однородных решений позволяет получить асимптотическое представление напряжений для больших углов (когда особенность сильная) и терять в точности с уменьшением угла (когда особенность становится слабой)**

Спасибо за внимание!